Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

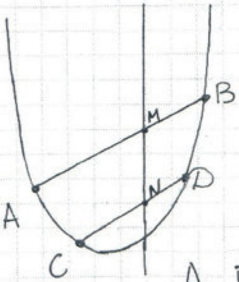
№1. Вариант 4

Докажем следующую лемму:

Лемма:

Пусть M и N - середины двух параллельных хорд параболы. Тогда прямая MN параллельна ~~оси~~ оси параболы (см. рисунок)

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
+	+	+	+	+	∓	+	0	7

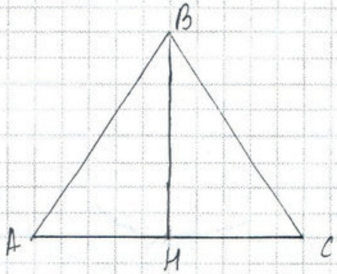


Доказательство:

Пусть хорды AB и CD параболы лежат на параллельных прямых $y=kx+a$ и $y=kx+b$, тогда абсциссы точек A, B, C, D - это корни уравнений $x^2=kx+a$ и $x^2=kx+b$, а абсциссы точек M и N - полусуммы корней этих уравнений, т.е. по теореме Виета равны $\frac{k}{2}$. Следовательно прямая MN параллельна оси Oy.

Вернемся к решению задачи. Проводим последовательно две параллельные хорды параболы; прямую, проходящую через их середины (параллельную Oy); перпендикуляр к этой прямой, пересекающий параболу в двух точках,

№1



Мы построили △ABC, где из вершины мы провели сторону AB и BC и у нас получился равнобедренный △ABC.

После этого из вершины B с помощью циркуля отложили BH. BH является в прямоугольном △ и высотой, и биссектрисой и медианой.

N 3

$\log_3(x-y+3z-1)+\log_3(2x+2y-2z-3)+$
$+\log_3(7-3x-y-z)>x^2+x-6.$

1) $(x-y+3z-1)(2x+2y-2z-3)=$

$\cancel{=2x^2-2y^2-2zx-5x+2zy+y+2z+3=}$

$\cancel{=2x^2-2y^2-2zx}$

2) $\log_3(x-y+3z-1)(2x+2y-2z-3)=$

$=2x^2+\cancel{2xy}-2xz-3x-\cancel{2xy}-2y^2+2zy+3y+$
$+6xz+6yz-6z^2-9z-2x-2y+2z+3=$
$=2x^2-2y^2-6z^2+4xz+8yz+y-5x-7z+3$

Место для скрепки

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2018 03 марта 2018г. (очный тур)

Место проведения МБУ ДО г.Сочи ЦТРиГО - г.Сочи

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№ 4

$$\frac{(4^x-16)(|x^2-3x|-2)}{|2x-3|-|x+1|}\ge 0$$

1) $\frac{(4^x-4^2)(x^2-3x-2)}{2x-3-x+1}\ge 0$ – это при условии что модуль >0 =>

=> $4^x-4^2=0$ $x^2-3x-2\ge 0$ $x-2\ne 0$

$x=2$ - корень $D=9+8=\sqrt{17}$ $\sqrt{D}=17$ $x\ne 2$.

корень $x_1=\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}$

$\frac{3-\sqrt{17}}{2}$ – $\frac{3+\sqrt{17}}{2}$ x

$x\in$ $(-\infty;\frac{3-\sqrt{17}}{2})\cup$

$(\frac{3+\sqrt{17}}{2};+\infty)$.

2) Рассмотрим когда модуль меньше нуля

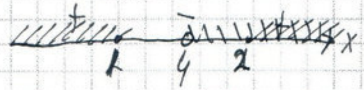
$\frac{(4^x-4^2)(-x^2+3x-2)}{-2x+3+x+1}\ge 0$

$x=2$ или $x^2-3x+2\ge 0$ или $-x+4\ne 0$

$x=2$ $D=9-8=1$ $\sqrt{D}=1$. $x\ne 4$

$x_{1,2}=\frac{3\pm 1}{2}$; $x_1=2$; $x_2=1$.

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.



$x \in [1;4) \cup (4;2]$.

Ответ $\left[\begin{array}{l} \left(-\infty; \frac{3-\sqrt{17}}{2}\right) \\ \left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}; +\infty\right) \\ [1;4) \cup (4;2] \end{array}\right.$

№5.

$4tg5\,tg9$ или $3tg6\,tg10$

$4\,tg\,45 > 3\,tg\,60$

$4\frac{\sqrt{3}}{3} > 3\sqrt{3}$

$\sqrt{3} \approx 1,7 > 3\cdot$

$\frac{4\cdot 1,7}{43} > 3\cdot 1,7$

$5,2 > 5,1$

$\Rightarrow 4tg5tg9 > 3tg6tg10$

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№ 7

$x^2 + x - 11111111112222222222$

$D = 1 + 44444444448888888888 =$

$= 44444444448888888889$

$$\begin{array}{l|l}
44444444448888888889 & 6666666667 \\
-36 & \\
\quad 844 & \\
-\ 756 & \\
\quad\ 8844 & \\
-\ 7956 & \\
\quad\ 88844 & \\
-\ 79956 & \\
\quad\ 888844 & \\
-\ 799956 & \\
\quad\ 8888888 & \\
-\ 7999956 & \\
\quad\ 88893288 & \\
-\ 79999956 & \\
\quad\ 889333288 & \\
-\ 799999956 & \\
\quad\ 8933333288 & \\
-\ 7999999956 & \\
\quad\ 33333333289 & \\
-\ 33333333289 & \\
\qquad 0 &
\end{array}$$

$x_1 = \frac{-1 + 6666666667}{2} =$

$= 3333333333$

$x_2 = \frac{-1 - 6666666667}{2} =$

$= -3333333334.$

№ 2.

$(x-1) f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x-1}$

$\left(\frac{1}{x} - 1\right) f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x) = \frac{1}{\frac{1}{x} - 1}$

$\frac{1-x}{x} f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x) = \frac{x}{1-x}$

$\left(\frac{1-x}{x}\right)\left(\frac{1}{x-1} - (x-1) f(x)\right) + f(x) = \frac{x}{1-x}$

$\frac{1}{x} + \frac{(x-1)^2}{x} f(x) + f(x) = \frac{x}{1-x}$

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

$$f(x)\ \frac{(x-1)^2+x}{x} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x-1} = \frac{x-1-x^2}{x\cdot(x-1)} = \frac{-x^2-x+1}{x(x-1)}$$

$$f(x) = \cancel{\frac{x^2-x+1}{x}} = \cancel{\frac{-x^2-x+1}{x(x+1)}}$$

$$f(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№ 7

$x^2 + x - 11111111112222222222 = 0$

$D = 1 + 4 \cdot 11111111112222222222 =$

$= 44444444448888888889.$

$44444444448888888889 \mid 666$

-36

$\cancel{84\,4}$

$\cancel{79\,66}$

$\cancel{88\,8\,4\,4}$

$-7\,9\,9\,5\,6$

$8\,8\,8\,8\,4\,4$

№ 3.

$\log_3(x-y+3z-1) + \log_3(2x+2y-2z-3) + \log_3(7-3x-y-z) > x^2+x-6$

$\begin{cases} x-y+3z-1 \geq 1 \\ 2x+2y-2z-3 \geq 1 \\ 7-3x-y-z \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_3(x-y+3z-1)=0 \\ \log_3(2x+2y-2z-3)=0 \\ \log_3(7-3x-y-z)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+x-6<0 \\ x_1+x_2=-1 \\ x_1 \cdot x_2=-6 \end{cases}$

$x \in \{-2; -1; 0; 1\}$

1) $\begin{cases} -2-y+3z-1=1 \\ -4+2y-2z-3=1 \\ 7+6-y-z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y-z=8 \\ -2y-2z=-24 \end{cases} \Rightarrow -4z=-16$

$z=4 \Rightarrow y=12-4=8$

$x \in (-2; 8; 4)$

2) $\begin{cases} -1-y+3z-1=1 \\ -2+2y-2z-3=1 \\ 7+3-y-z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y+3z=3 \\ y+z=9 \end{cases} \Rightarrow 4z=12$

$z=3 \Rightarrow y=6$

$x \in (-1; 6; 3)$

3) $\begin{cases} -y+3z-1=1 \\ 2y-2z-3=1 \\ 7-y-z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y+3z=2 \\ y+z=8 \end{cases} \Rightarrow 4z=10 \Rightarrow$ при $x=0$ $z \notin Z$

4) $\begin{cases} 1-y+3z-1=1 \\ 2+2y-2z-3=1 \\ 7-3-y-z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y+3z=1 \\ 2y-2z=2 \end{cases} \Rightarrow z=1 \Rightarrow y=1$

Ответ: при $x=-2$ $\{-2; 8; 4\}$, при $x=-1$ $\{-1; 6; 3\}$, и при $x=1 \Rightarrow \{1; 1; 1\}$ и при $x=0$ $z \notin Z$

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
–	+	0	0	±	0	0	0	2

Вариант № 1

№ 1

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$

$7 = 49 + 49 - 2 \cdot 49 \cdot \cos\alpha$

$2 \cdot 49 \cdot \cos\alpha = -7 + 98$

$\cos\alpha = \frac{13}{14} = \frac{6{,}5}{7}$

№ 2 $f(x) + x \cdot f\left(\frac{x}{2x-1}\right) = 2$

1) $f(x) = 2 - x \cdot f\left(\frac{x}{2x-1}\right)$

Найдём $f\left(\frac{x}{2x-1}\right)$

$f\left(\frac{x}{2x-1}\right) = 2 - \frac{x}{2x-1} \cdot f\left(\frac{\frac{x}{2x-1}}{2 \cdot \frac{x}{2x-1} - 1}\right)$

$\frac{\frac{x}{2x-1}}{\frac{2x-2x+1}{2x-1}} = \frac{x}{2x-1} \cdot \frac{1}{2x-1} = x$

Подставим 2 в 1

$f(x) = 2 - x \cdot \left(2 - \frac{x}{2x-1} \cdot f(x)\right)$

$f(x) = 2 - 2x + \frac{x^2}{2x+1} \cdot f(x)$

$f(x) - \frac{x^2}{2x-1} \cdot f(x) = 2 - 2x$

Место для скрепки

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2018

03 марта 2018г. (очный тур)

Место проведения МБУ ДО г.Сочи ЦТРиГО - г.Сочи

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

$f(x) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{2x-1}\right) = 2 - 2x$

$f(x) \cdot \left(\frac{2x-1-x^2}{2x-1}\right) = 2-2x$

$f(x) = 2(1-x) : \left(-\frac{x^2-2x+1}{2x-1}\right) =$

$2 \cdot (1-x) \cdot \frac{-(2x-1)}{(x-1)^2} = \frac{-2 \cdot (1-x) \cdot (2x-1)}{(1-x)^2}$

$\frac{2(2x-1)}{x-1}$ $\qquad f(x) = \frac{2(2x-1)}{x-1}$

Регистрация №59835

№5

$\sin\alpha\cos^6\alpha = \frac{1}{4}\cdot 4\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha\cdot\cos^4\alpha =$

$\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha\cdot\frac{4\cos^4{}^2}{4} = \frac{1}{16}(1-\cos^2 2\alpha)(1+\cos 2\alpha)^2$

пусть $\cos 2\alpha = t$

$f(t) = \frac{1}{16}(1-t^2)(1+t)^2 = \frac{1}{16}(1-t)(1+t)^3$

$f'(t) = \frac{1}{16}(3(1+t)^2(1-t) - (1+t)^3) =$

$\frac{1}{16}(t+1)^2(2-4t) = \frac{1}{16}(1-\frac{1}{2})(1+\frac{1}{2})^3 =$

$= \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{27}{8} = \frac{27}{256}$

Почему это max?

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

Вариант 4.

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
+	–	0	∓	–	∓	±	∓	~~+~~ 2

(7).

$x^2 + x = 111111222222$

$x^2 + x - 111111222222 = 0$

1 балл реш

$D = b^2 - 4ac$

$D = 1 - 4\cdot(-111111222222) = 1 + 444444888888 =$

$= 444444888889 = 666667^2$

Откуда взялось это число? Где вычисления?

$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

$x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm 666667}{2}$; $x_1 = \dfrac{-666668}{2} = -333334$

±

$x_2 = \dfrac{666666}{2} = 333333$

Ответ: -333334; 333333.

(N4) $\dfrac{(2^x-4)(|x^2-2x|-3)}{|3-x|-|x+1|} \geq 0$

ио і. Виіє $x^2-2x-3 \leq 0$
$x=-1$ $x=3$

Каждый множитель как в числителе, так и в знаменателе есть разность неотрицательных чисел. Поэтому, заменяя их на разность квадратов, получим равносильное неравенство в области допустимых значений

$\dfrac{(x-2)(x^2-2x-3)(x^2-2x+3)}{(3-x-x-1)(3-x+x+1)} \geq 0$

$\dfrac{(x-2)(x-1)(x-3)}{x-1} \leq 0$

+ ∨ + — + ; 1, 2, 3

$x \in [2;3]$

+

Ответ. $x \in [2;3]$

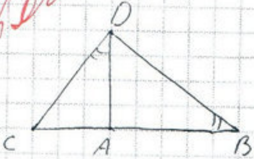
Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

6 баллов

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
+	+	+	+	+	0	+	0	6

Вариант 1

№1



Пусть дан отрезок $AB = 7$. На продолжении отрезка AB за точку A отложим отрезок $AC = \frac{1}{7} AB$. На отрезке CB, как на диаметре, построим окружность. Из точки A восставим перпендикуляр AD до пересечения с этой окружностью в точке D.

Тогда $AB = \sqrt{CA \cdot AB} = \sqrt{7}$, т.к. угол D прямой и в силу подобия (по равенству углов) треугольника CAD и DAB имеем: $\frac{AD}{AC} = \frac{AB}{AD}$, т.е $AD = \sqrt{7}$

№2

Данное равенство должно выполняться для любого x, в том числе для $x_2 = \frac{x}{2x-1}$. Отсюда находим, что $x = \frac{x_2}{2x_2-1}$. Поэтому получим $f\left(\frac{x_2}{2x_2-1}\right) + \frac{x_2}{2x_2-1} f(x_2) = 2$. Переобозначая x_2 через переменную x, получим систему равенств.

$$f(x) + x f\left(\frac{x}{2x-1}\right) = 2$$

$$f\left(\frac{x}{2x-1}\right) + \frac{x}{2x-1} f(x) = 2$$

Место для скрепки

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2018 03 марта 2018г. (очный тур)

Место проведения РУТ (МИИТ) - г. Москва

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№6

1) Пусть шар с центром в (O_1) касается граней $ABCD$, AA_1D_1D, AA_1B_1B, соответств. шар с центром в точке O_2 касается граней $A_1B_1C_1D_1$, BB_1C_1C, DD_1

Так как первый шар касается граней AA_1B_1B, AA_1D_1D, то его центр O_1 равноудален от указанных граней, что есть лежит на биссекторной плоскости двугранного угла с ребром AA_1, что есть плоскости AA_1C_1C (с учетом того, что ~~AA_1D_1D~~ $ABCDA_1B_1C_1D_1$ - куб).

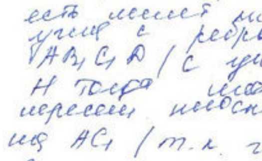
Т.к. первый шар касается граней $ABCD$, AA_1D_1D, то центр O_1 равноудален от указанных граней, что есть лежит на биссекторной плоскости двугран. угла с ребром AD, что есть на плоскости AB_1C_1D (с учетом того, что $ABCDA_1B_1C_1D_1$ - куб.)
И тогда точка O_1 лежит на прямой пересеч. плоскостей AA_1C_1C $A_1B_1C_1D$, ~~...~~, что есть на AC_1 (т.к. шар внутри куба, что O_1 - точка $\in AC_1$)
Рассуждая аналогично, то и точка $O_2 \in AC_1$

2) Т.к. $A_1C_1 = a\sqrt{2}$, $AC_1 = a\sqrt{3}$.

Симметрия: $AO_1 = C_1O_2$ и $AO_1 = C_1O_2 = \frac{a\sqrt{3}-2r}{2}$
где r - радиус шаров

3) Пусть K_2 - точка касания второго шара с гранью $A_1B_1C_1D_1$ ($K_2 \in A_1C_1$)

$a\sqrt{2}$



$\triangle AA_1C_1 \sim \triangle O_2K_2C_1$ (по 2-м углам)

$\frac{AA_1}{O_2K_2} = \frac{AC_1}{O_2C_1}$; $\frac{a}{r} = \frac{a\sqrt{2}}{\frac{a\sqrt{3}-2r}{2}}$

$\frac{1}{r} = \frac{2\sqrt{2}}{a\sqrt{3}-2r}$

$2\sqrt{2}r = a\sqrt{3} - 2r$.

Регистрация №59330 ~~r=13~~ Страница 02 из 06

$r(2\sqrt{2}+2) = a\sqrt{3}$

$r = \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}+2}$ Ответ: $\frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}+a}$?? (+)

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№5. $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ $\left(1-\frac{1}{\sin\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{\cos\alpha}\right)>5$

Пусть $\alpha=\frac{\pi}{6}$, тогда $\left(1+\frac{1}{\sin\frac{\pi}{6}}\right)\left(1+\frac{1}{\cos\frac{\pi}{6}}\right)=$
$=(1+2)\left(1+\frac{2}{\sqrt3}\right)=3\left(1+\frac{1}{\sin}\right)=3+2\sqrt3>5$ (истина)

пусть $\alpha=\frac{\pi}{4}$ $(1+\sqrt2)(1+\sqrt2)=1+2\sqrt2+2=3+2\sqrt2>5$ (истина)

Если $\alpha=\frac{\pi}{3}$, то $\left(1+\frac{1}{\sin\frac{\pi}{3}}\right)\left(1+\frac{1}{\sin\frac{\pi}{3}}\right)=\cancel{N}=3+2\sqrt3>5$ (истина)

Если $\alpha=\frac{2\pi}{3}$, то $\frac{2\pi}{3}>\frac{\pi}{2}$ $\left(1+\frac{2}{\sqrt3}\right)(1-2)<0$

$\left(1+\frac{1}{\sin\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{\cos\alpha}\right)>5$ при $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$

$-$

№2. $f(x)+5xf\left(\frac{1}{x}\right)=3x^3$ (1)

Заменим x на $\frac{1}{x}$, получим

$f\left(\frac{1}{x}\right)+5f(x)=3x^3$ (2) ✓

(2) умножим на $(-5x)$

$-5xf\left(\frac{1}{x}\right)-25xf(x)=-15x^3$ (3)

(3) сложим (1)

$$\begin{cases}-5xf\left(\frac{1}{x}\right)-25xf(x)=-15x^3\\ f(x)+5xf\left(\frac{1}{x}\right)=3x^3\end{cases}$$

$f(x)-25xf(x)=-12x^3$

$f(x)=(1-25x)=-12x^3$

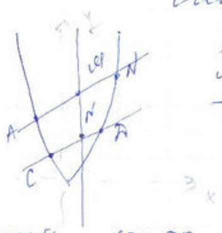
$f(x)=\frac{-12x^3}{1-25x}$; $f(x)=\frac{25x^3}{25x-1}$

Ответ: $\frac{25x^3}{25x-1}$

$-$

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

(1).



Лемма: Пусть M и N середины 2-х парал. хорд параболы. Тогда прямая MN параллельна оси параболы.

Покажем это:

1) Пусть хорды AB и CD параболы лежат на параллельных прямых $y = kx + a$ и $y = kx + b$, тогда абсцисса точек A, B, C, D — это корни у-й $x^2 = kx + a$ и $x^2 = kx + b$, а абсцисса точек M и N — полусумма корней этих уравнений, то есть по т. Виета $\frac{k}{2}$. Следовательно, прямая $MN \parallel$ ~~оху~~ оси Oy ∎.

2) Проведем последовательно две параллельных хорды параболы. Прямую, проходящую через их середины ($\parallel Oy$), перпендикуляр к этой прямой (пересек. параболу в двух точках). Середина перпенд. к полученной хорде. Этот перпендик. и будет осью Oy, а ось Ox — это перпендик. к Oy в точке пересеч. с параболой.

Что и требовалось доказать.

±

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№8

$$\begin{cases} (|x|+1)a = y+\cos x \\ 2^{|\sin x|} + |y| = 2 \end{cases}$$

Воспользуемся чётностью ф-ий $|\sin x|$ и $|y|$, $|x|$, $\cos x$, если предположить, что пара $(x_0; y_0)$ является решением данной системы, то и пара $(-x_0; -y_0)$ тоже будет её решением, поскольку

$$\begin{cases} (|-x_0|+1)a \\ 2^{|\sin(-x_0)|} + |-y_0| = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (|x_0|+1)a = y_0 \cos x_0 \\ 2^{|\sin x_0|} + |y_0| = 2 \end{cases}$$

С-но, система может иметь ед. реш. Поставим это значение в систему

$$\begin{cases} (0+1)a = y+\cos 0 \\ 2^{|\sin 0|} + |y| = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = y+1 \\ |y| = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = y+1 \\ \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=-1 \end{array} \right. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} a = 2 \\ a = 0 \end{array} \right.$$

Ответ: 0; 2

+

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№3. $\log_5(2x+y-3z-3)+\log_5(x-2y-4z-1)+\log_5(y+7z-3x+7)>$
$>z^2-9z+18$

ОДЗ: $\begin{cases} 2x+y-3z-3>0 & (1) \\ x-2-4z-1>0 & (2) \\ y+7z-3x+7>0 & (3) \end{cases}$

Заметим, $2x+y-3z=a$; $x-2y-4z=b$, если
$a+b=3x-y-7z=a+b$, т.е
$y+7z-3x=-a-b$
$\log_5(a-3)+\log_5(b-1)+\log_5(7-a-b)>z^2-9z+18$
См. $7-a-b=(3-a)+(1-b)+3$
итак, $\begin{cases} a>3 \\ b>1 \\ a+b<7 \end{cases}$

—

№ 4 $$\frac{\overset{(3)}{|x-1|-1}}{(\underset{(1)}{1-x^2})(\underset{(2)}{3^x-27})} \geq 0$$

Решим неравенство методом интервалов. Найдем нули функции

1) $(1-x^2)\neq 0$

$(1-x)(x+1)\neq 0$

$x\neq 1$ и $x\neq -1$

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
0	0	0	±	+	0	∓	0	2

2) $3^x-27\neq 0$

$3^x\neq 27$

$3^x\neq 3^3$

$x\neq 3$

3) $|x-1|-1=0$

Рассмотрим 2 случая

$x-1-1=0$ и $-x+1-1=0$

$x-2=0$ $-x=0$

$x=2$ $x=0$

$x\in(-\infty;-1)\cup[0;1)\cup[2;3)$

Ответ: $(-\infty;-1)\cup[0;1)\cup[2;3)$.

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№ 7

$x^2 + x = 1111111122222222$

$x^2 + x - 1111111122222222$

По теореме Виета ясно, что

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -1 \\ x_1 \cdot x_2 = 1111111122222222 \end{cases}$$

Заметим, что

$12 = -3 \cdot 4$

$1122 = 33 \cdot 34$

$1111111122222222 \,|\, 333333333$

333333334

...

Отсюда:

$x_1 = 333333333$

$x_2 = 333333334$

Ответ: 333333333; 333333334.

№ 5.

$y\ \sin^2\alpha\cos^6\alpha \leq \frac{27}{256}$

$y = \sin\alpha\cos^6\alpha = \sin^2\alpha(1-\sin^2\alpha)^3$

Пусть $\sin^2\alpha = t$, тогда

$y = t(1-t)^3 = t(1-3t+3t^2-t^3) =$

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

$= t - 3t^2 + 3t^3 - t^4$

$y' = 1 - 6t + 9t^2 - 4t^3$

$1 - 6t + 9t^2 - 4t^3 = 0$

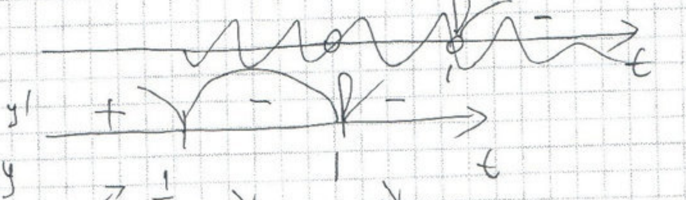
$t = 1$! корень уравнение.

$$\begin{array}{r|l} -4t^3 + 9t^2 - 6t + 1 & t - 1 \\ \hline -4t^3 + 4t^2 & -4t^2 + 5t - 1 \\ 5t^2 - 6t & \\ 5t^2 - 5t & \\ -t + 1 & \\ -t + 1 & \\ 0 & \end{array}$$

$(t-1)(-4t^2+5t-1) = 0$

$t - 1 = 0$ и $-4t^2 + 5t - 1 = 0$

$t = 1$ $t_1 = 1$; $t_2 = \frac{1}{4}$



$t_{max} = \frac{1}{4}$ вершина и замена

$\sin^2\alpha = \frac{1}{4}$

$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, тогда

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

$$y\ max = \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{1}{4}\cdot\frac{27}{64} = \frac{27}{256} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin^2\alpha \cos^6\alpha \le \frac{27}{256}$$

ч.т.д.

Место для скрепки

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2018

03 марта 2018г. (очный тур)

Место проведения ФГБОУ ВО ИрГУПС - г.Иркутск

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

2.

$$f(x) + x f\left(\frac{x}{2x-1}\right) = 2$$

Вариант 1

при $x = 1$

всё получается.

2 балла
рец

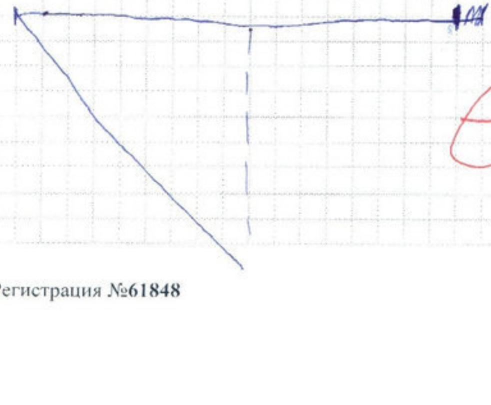
3.

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
–	–	0	+	0	0	±	0	2

– длина 7

1) примерно отмечаем радиус половины с одной стороны и другой (тоесть берем примерный радиус равный половине отр. если с двух сторон радиус совпал, то это центр отрезка.

2) дальше берем линейку отмечаем на ней 7 и из центра выпускаем луч, и соединяем отрезок из центра с отр из вершины.



Решая ее, находим, что $f(x)=\frac{4x-2}{x-1}$. Проверка показывает, что эта функция есть решение данного уравнения.

Ответ: $\frac{4x-2}{x-1}$

№3

Обозначим $2x-2y+3z-3=A$, $4z-x-3y=B$, $5y-x-7z+6=C$. Находим, что $A+B+C=3$. По условию x, y, z – целые числа, поэтому $A\geqslant 1$, $B\geqslant 1$; $C\geqslant 1 \Rightarrow A=1$, $B=1$; $C=1$. А тогда получаем неравенство $y^2-4y<0 \Leftrightarrow 0<y<4 \Rightarrow$ $\Rightarrow y=\{1,2,3\}$.

Решим систему $A=1$, $B=1$. Выразим неизвестное x, z будут целыми лишь при $y=2$, $x=1$, $z=2$. Таким образом, ответ $(1;2;2)$

Ответ: $(1;2;2)$

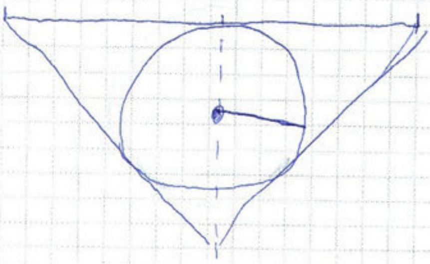
№4

Данное неравенство равносильно неравенству

$$\frac{(x-1)^2-1}{(x-1)(x+2)(x-3)}\leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{x(x-2)}{(x-1)(x+1)(x-3)}\leqslant 0.$$

Решая его методом интервалов, находим с учетом ОДЗ: Ответ: $x<-1$; $0\leqslant x<1$; $2\leqslant x<3$

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.



Показываю примерно, потому что нету линейки.

Теперь вписываем окр. в Δ.

Есть формула площади $S = p \cdot r$

$$p \cdot r = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\frac{7+7+7}{2} \cdot r = \frac{49\sqrt{3}}{4}$$

$$r = \frac{49\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{2}{21} = \frac{7\sqrt{3}}{6}$$

−

Место для скрепки

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2018

03 марта 2018г. (очный тур)

Место проведения ФГБОУ ВО ИрГУПС - г.Иркутск

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

4

$$\frac{|x-1|-1}{(1-x^2)(3^x-27)} \geq 0$$

нул. числ

$|x-1|-1=0$

$|x-1|=1$

$x-1=1$ $\qquad$ $x-1=-1$

$x=2$ $\qquad$ $x=0$

нул. зн

$(1-x^2)(3^x-27)=0$

$$\left[\begin{array}{l} 1-x^2=0 \\ 3^x-27=0 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x=\pm 1 \\ x=3 \end{array}\right.$$

(+)

Ответ: $x \in (-\infty; -1) \cup$

$\cup [0, 1) \cup [2; 3)$

Регистрация №61848

Страница 03 из 05

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

7

$x^2+x=1111111122222222$

$x^2+x-1111111122222222=0$

Сначала я взял вместо 1111111122222222 число 1122 и попробовал вычислить D (дискр.)

4489 — когда у нас получается двоятка
3·3 — взял закрыл 2 посл. числа
7·7 взял 63 469, 73479
не получилось
взял 67 и 67, и ура!!! получилось.

$$\begin{array}{r} 67 \\ \times\ 67 \\ \hline 469 \\ 402\ \ \\ \hline 4489 \end{array}$$

Потом взял

111222

44889 — понятно, что если сумма чисел не делится на 3, то и число не делится на 3,

~~взял 67 67~~

=> ~~[illegible]~~ лучше брать 7 и 7

Место для скрепки

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

$$\begin{array}{r} 667 \\ 667 \\ \hline 4669 \\ 4002 \\ 4002 \\ \hline 444889 \end{array}$$

$\Downarrow$

Есть закономерность, в черновике я проверил

и

$$\begin{array}{r} 6667 \\ 6667 \\ \hline 46669 \\ 40002 \\ 40002 \\ 40002 \\ \hline 44448889 \end{array}$$

$\Rightarrow$ D числа 1111 1111 2222 2222 будет равен

$\Downarrow$

66666667

$\Downarrow$

$$x = \frac{-1 + 66666667}{2} = 33333333$$

$$x = \frac{-1 - 66666667}{2} = -33333334$$

Ответ: 3333 3333

−3333 3334

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№7. Вар 2

$x^2 - x = 111112222$

$x^2 - x - 1111122222 = 0$

$D = b^2 - 4ac$

$D = 1 - 4 \cdot 1(-1111122222) = 1 + 4444488888 = \sqrt{4444488889} =$

$= \underline{66667}$ Откуда это число?

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
0	0	∓	+	∓	−	−	+	2

$x_1 = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

$x_1 = \dfrac{1 + 66667}{2 \cdot 1} = 33334$

$x_2 = \dfrac{1 - 66667}{2 \cdot 1} = -33333$

Ответ: $x_1 = 33334$; $x_2 = -33333$.

2 балла реш

№4.

$$\frac{\left(2^{x^2-2x} - 8\right)\left(|3+2x| - |x-2|\right)}{|x^2-1| - 3} > 0$$

$3+2x$	−	+	+	+	+
$x-2$	−	−	−	−	+
	$-1,5$	-1	1	2	
x^2-1	+	+	−	+	+

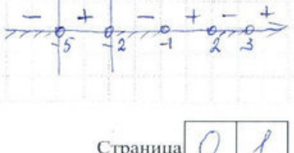
$3 + 2x = 0$ $\quad x - 2 = 0 \quad x^2 - 1 = 0$

$2x = -3 \quad x = 2 \quad x = \pm \cancel{7}\,\underline{1}.$

$x = -1,5$

а) $\begin{cases} x < -1,5 \\ \dfrac{\left(2^{x^2-2x} - 8\right)\left(-3-2x+x-2\right)}{x^2-1-3} > 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x < -1,5 \\ \dfrac{\left(2^{x^2-2x} - 8\right)\left(-x-5\right)}{x^2-4} > 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x < -1,5 \\ \dfrac{\left(2^{x^2-2x} - 8\right)\left(-3-2x+x-2\right)}{x^2-1-3} < 0 \end{cases}$



$2^{x^2-2x}=8$

$(-\infty;-5)\cup(-2;-1,5)$.

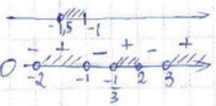
$x^2-2x=2^3$

$x^2-2x=3$

$x^2-2x-3=0$

$x_{1,2}=-1;3.$

б) $\begin{cases}-1,5\le x\le -1\\ \dfrac{(2^{x^2-2x}-8)(3+2x+x-2)}{x^2-1-3}>0\end{cases}$ $\begin{cases}-1,5\le x\le -1\\ \dfrac{(2^{x^2-2x}-8)(3x+1)}{(x-2)(x+2)}>0\end{cases}$



$[-1,5;-1)$.

в) $\begin{cases}-1<x\le 1\\ \dfrac{(2^{x^2-2x}-8)(3+2x+x-2)}{-x^2+1-3}>0\end{cases}$ $\begin{cases}-1<x\le 1\\ (2^{x^2-2x}-8)(3x+1)<0\end{cases}$

$\begin{cases}-1<x\le 1\\ (2^{x^2-2x}-8)(3x+1)<0\end{cases}$

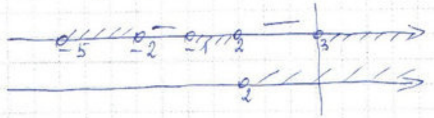
$(-\frac{1}{3};1]$.

г) $\begin{cases}1<x\le 2\\ \dfrac{(2^{x^2-2x}-8)(3+2x+x-2)}{x^2-4}>0\end{cases}$ $\begin{cases}1<x\le 2\\ \dfrac{(2^{x^2-2x-8})(3x+1)}{(x-2)(x+2)}>0\end{cases}$

$(1;2)$.

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

9) $\begin{cases} x>2 \\ \dfrac{(2^{x^2-2x}-8)(3+2x-x+2)}{x^2-4}>0 \end{cases}$ $\begin{cases} x>2 \\ \dfrac{(2^{x^2-2x}-8)(x+5)}{x^2-4}>0 \end{cases}$



$(3;+\infty)$.

$(-\infty;-5)\cup(-2;-1,5)\cup[1,5;-1)\cup(-\frac{1}{3};1]\cup(1;2)\cup(3;+\infty)=$

$=(-\infty;-5)\cup(-2;-1)\cup(-\frac{1}{3};2)\cup(3;+\infty)$.

+

Ответ: $(-\infty;-5)\cup(-2;-1)\cup(-\frac{1}{3};2)\cup(3;+\infty)$.

№5.

$0<x<\frac{\pi}{4}$ $\dfrac{\cos x}{(\sin^2 x)(\cos x-\sin x)}>8$, при $0<x<\frac{\pi}{4}$

$$\frac{\cos x}{\sin^2 x(\cos x-\sin x)}>8$$

$$\frac{\cos x}{\sin x\cdot\sin x\cdot\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}-x)}>8$$

$$\frac{2\cos x}{\sqrt{2}\sin x(\cos(2x-\frac{\pi}{4})-\cos\frac{\pi}{4})}>8$$

$$\frac{2\cos x}{\sqrt{2}\sin x(\cos 2x\cos\frac{\pi}{4}+\sin 2x\sin\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{4})}>8$$

$$\frac{2\cos x}{\sqrt{2}\sin x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 2x+\sin 2x-1)}>8$$

$$\frac{2\cos x}{\sin x(\cos 2x+\sin 2x-1)}>8$$

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

$$\frac{2}{tgx\left(\frac{1-tg^2x}{1+tg^2x}+\frac{2tgx}{1+tg^2x}-1\right)}>8$$

$$\frac{2(1+tg^2x)}{tgx(2tgx-2tg^2x)}>8$$

$$\frac{2(1+tg^2x)}{2tg^2x(1-tgx)}-8>0$$

$$\cancel{\frac{8tg^3x-8tg^2x+1}{tg^2x(1-tgx)}>0} \qquad \frac{8tg^3x-8tg^2x+1}{tg^2x(1-tgx)}>0$$

пусть $tgx=y$

$$\frac{8y^3-8y^2+1}{y^2(1-y)}>0$$

$8y^3-8y^2+1\neq0$ при $y\in R$ почему?

$y^2(1-y)\neq0$

$y^2\neq0$ или $1-y\neq0$

$y\neq0$ $\qquad y\neq1$

$0<y<1$

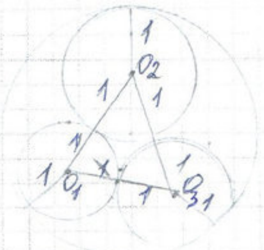
$$\begin{cases} tgx>0 & x\in(\pi k;\frac{\pi}{2}+\pi k),\ k\in Z \\ tgx<1 & x\in(-\frac{\pi}{2}+\pi k;\frac{\pi}{4}+\pi k),\ k\in Z. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\in(\pi k;\frac{\pi}{2}+\pi k) \\ x\in(-\frac{\pi}{2}+\pi k;\frac{\pi}{4}+\pi k) \end{cases} \Rightarrow 0<x<\frac{\pi}{4}$$

значит, при $0<x<\frac{\pi}{4}$ выражение $\frac{\cos x}{\sin^2x(\cos x-\sin x)}>8$ Доказано.

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№6.

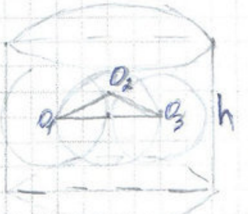


$R = 1$

$\Delta O_1O_2O_3$ – равносторонний; сторона равна 2.

Высота цилиндра = 2.

Центр основания цилиндра лежит на высоте $\Delta O_1O_2O_3$. Высота $\Delta O_1O_2O_3$ равна:



$2^2 = 1^2 + h^2$, $h = \sqrt{4-1}$, $h = \sqrt{3}$.

Радиус основания цилиндра равен: $1 + \frac{2}{3}\sqrt{3}$

Высота H будет равна 2.

$V_{цил} = S_{осн} \cdot H$, $S_{осн} = \pi R^2$.

$S_{осн} = \pi \cdot \left(1 + \frac{2}{3}\sqrt{3}\right)^2$

Ответ: $V_{цил} = \pi \left(1 + \frac{2}{3}\sqrt{3}\right)^2 \cdot 2$.

№3.

$\lg(2x+3y-2z-3) + \lg(4x-y-4z+7) + \lg(6z-2y-6x-1) > 6z^2 - 47z + 77$

1. О.Д.З. $\begin{cases} 2x+3y-2z-3>0 \\ 4x-y-4z+7>0 \\ 6z-2y-6x-1>0 \end{cases}$

2. Т.к. $x, y, z \in R$, то $2x+3y-2z-3$, $4x-y-4z+7$, $6z-2y-6x-1$ являются целыми.

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

Значит (с учетом О.Д.З): $\begin{cases} 2x+3y-2z-3\geq 1 \\ 4x-y-4z+7\geq 1 \\ 6z-2y-6x-1\geq 1 \end{cases}$

3. $(2x+3y-2z-3)+(4x-y-4z+7)+(6z-2y-6x-1)=3$

Тогда: $\begin{cases} 2x+3y-2z-3=1 \\ 4x-y-4z+7=1 \\ 6z-2y-6x-1=1 \end{cases}$

4. Значит $\lg 1+\lg 1+\lg 1 > 6z^2-47z+77 \Rightarrow 6z^2-47z+77<0$

$6z^2-47z+77=0$

$D=b^2-4ac$

$D=2209-4\cdot 6\cdot 77=2209-1848=19$

5. $z\in\left(\frac{47-19}{12}=\frac{28}{12};\ \frac{47+19}{12}=\frac{66}{12}\right)$ т.к. $z\in\mathbb{Z}$, то $z=3,4,5$.

1) $z=3$, $\begin{cases} 2x+3y=9 \\ 4x-y=5 \end{cases} \rightarrow 7y=13$ целые числа.

2) $z=4$, $\begin{cases} 2x+3y=11 \\ 4x-y=9 \end{cases} \rightarrow 7y=5$.

3) $z=5$, $\begin{cases} 2x+3y=13 \\ 4x-y=13 \end{cases} \rightarrow 7y=13$.

7

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

~~[illegible]~~ №5

$(1-\cos^2 a)\cos^6 a=(1-y)y^3$, где $y=\cos^2 a$.

Найдём $\max f(y)=y^3-y^4$ при $0\le y\le 1$. Имеем $f'_y=3y^2-4y^3$. Тогда критическая точка $y=\frac{3}{4}$. В этой точке $f(y)$ имеет максимум.

$f\max=\left(\frac{3}{4}\right)^3-\left(\frac{3}{4}\right)^4=\left(\frac{3}{4}\right)^3\cdot\frac{1}{4}=\frac{27}{256}$.

Так как $\max f(y)=\frac{27}{256}$, то для любой другой точки $f(y)<\frac{27}{256}$, что и требовалось доказать.

№7

Преобразуем первую часть равенства.

$1111111122222222=\frac{10^{16}-1}{9}+\frac{10^8-1}{9}=\frac{(10^8-1)}{9}\frac{(10^8+1)}{}+\frac{10^8-1}{9}=\frac{10^8-1}{9}\cdot(10^8+2)=\frac{10^8-1}{3}\cdot\frac{10^8+2}{3}$

Покажем, что число $\frac{10^8-1}{3}$ в уравнение, получим: $\left(\frac{10^8-1}{3}\right)^2+\frac{10^8-1}{3}=\frac{10^8-1}{3}\cdot\left(\frac{10^8-1}{3}+1\right)=$

$=\frac{10^8-1}{3}\cdot\frac{10^8+2}{3}$, т.е. равно правой части уравнения. А тогда второй корень будет равен: $-\frac{10^8+2}{3}$

Ответ: $\left\{\frac{10^8-1}{3};-\frac{(10^8+2)}{3}\right\}$

№8.

$x^2+2ax+2a^2+4a+3=0$

$D\geqslant 0$

$\begin{cases} x_1+x_2=-2a \\ x_1\cdot x_2=2a^2+4a+3 \end{cases}$

$D_1=a^2-(2a^2+4a+3)=a^2-2a^2-4a-3=-a^2-4a-3=-(a^2+4a+3)=-(x+3)(x+1)$

$D_1\geqslant 0$; $-(a+3)(a+1)\geqslant 0$; $(a+3)(a+1)\leqslant 0$; $-3\leqslant a\leqslant -1$

$x_1+x_2=-2a$;

$(x_1+x_2)^2=(x_1)^2+2x_1\cdot x_2+(x_2)^2$

$(x_1)^2+(x_2)^2=(x_1+x_2)^2-2x_1\cdot x_2$

$(x_1)^2+(x_2)^2=4a^2-2x_1\cdot x_2=4a^2-2(2a^2+4a+3)=4a^2-4a^2-8a-6=$

$=-8a-6=-2(4a+3)$.

$f(a)=-2(4a+3)$ - убывающая функция (меньшему значению аргумента соответствует большее значение функции).

$(x_1)^2+(x_2)^2=-2(4a+3)$ и $-3\leqslant a\leqslant -1$

при $a=-3$ (наим. значение аргумента

$a)$ $(x_1)^2+(x_2)^2=-8\cdot(-3)-6=24-6=18.$

Наибольшее значение при $a=-3$ и $(x_1)^2+(x_2)^2=18$

Проверка: $x^2+2ax+2a^2+4a+3=0$

при $a=-3$, $x^2+6x+9=0$; $x_1=x_2=3$ и $(x_1)^2+(x_2)^2=9+9=18$

Ответ: $a=-3$; $(x_1)^2+(x_2)^2=18$.

+

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

ВN1

N6. Пусть r - искомый радиус

Если соединить попарно центры шаров, то получим прав. тетр. со стороной 2r.

Т.к. шары вписаны в трёхгранные углы при верш пр. тетр, то их центры лежат на соотв. высотах тетр.

Поэтому центр пр. тетраэдра с вершинами в центрах данных шаров совпадает с центром O данного прав тетраэдра.

Пусть шар радиуса r с центром O_1, впис. в трёхгранный угол с верш. D, касается плоскости ABD данного тетр. ABCD со стороной $\frac{10}{\sqrt{6}-1}$ в точке P.

Тогда $O_1P = r$, $OD = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{10}{(\sqrt{6}-1)}\cdot\sqrt{6}$; $OO_1 = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot 2r\sqrt{6} = \frac{r\sqrt{6}}{2}$.

$O_1D = OD - OO_1 = \frac{a\sqrt{6}}{4} - \frac{r\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{6}(a-2r)}{4}$

Пусть M - центр. осн. ABC, K - середина AB. φ - угол между выс. тетр. и плос. его грани.

Из прямоуг. $\triangle DMK$: $\sin\varphi = \frac{MK}{DK} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{6}}{\frac{a\sqrt{3}}{6}} = \frac{1}{3}$

Значит, $O_1D = \frac{O_1r}{\sin\varphi}$ или $\frac{\sqrt{6}(a-2r)}{4} = 3r$

$r = \frac{a(\sqrt{6}-1)}{10} = \frac{\cancel{10}\cdot\cancel{(\sqrt{6}-1)}}{\cancel{(\sqrt{6}-1)}\cdot\cancel{10}} = 1$

Ответ: 1.

+

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
0	0	−	+	−	+	−	0	2

2 балла

Место скрепки

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№3.

$$\log_2(2x-2y+3z-3)+\log_2(4z-x-3y)+\log_2(5y-x-7z+6)>y^2-4y$$

ОДЗ: $\begin{cases} 2x-2y+3z-3>0 \\ 4z-x-3y>0 \\ 5y-x-7z+6>0 \end{cases}$

$y^2-4y<0$

$y(y-4)<0$

$y=1;2;3.$

$\begin{cases} 2x-2y+3z-3=1 \\ 4z-x-3y=1 \\ 5y-x-7z+6=1 \end{cases}$?? откуда эти равенства.

при $y=1$ $2x-2+3z-3=1$

$2x+3z=6$

$x=0;\ z=2$

$y=1;\ x=0;\ z=2$

при $y=2$ $2x-4+3z-3=1$

$2x+3z=8$

$z=0;\ x=4$ $\Rightarrow$ $y=2;\ z=0;\ x=4$

при $y=3$ $2x-6+3z-3=1$

$2x+3z=10$

$x=2;\ z=2$

$y=3;\ x=2;\ z=2$

$y=3;\ z=0;\ x=5.$

Отв: $y=1;\ x=0;\ z=2;\ y=2;\ z=0;\ x=4$
$y=3;\ x=2;\ z=2;\ y=3;\ z=0;\ x=5$

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№7. $x^2+x=1111111122222222$

$D=1+4444444488888888=4444444488888889;\ \sqrt{D}=66666667$

Откуда взялось это число?

$x_{1,2}=\frac{-1\pm 66666667}{2}=33333333$

$x_1=33333333$

$x_2=-33333334$

Ответ: 33333333; −33333334

(−)

№4. $\frac{|x-1|-1}{(1-x^2)(3^x-27)}\geq 0$

$\frac{|x-1|-1}{(1-x)(1+x)(3^x-3^3)}\geq 0$

$\frac{(|x-1|)^2-1^2}{(1-x)(1+x)(3-1)(x-3)}\geq 0 \quad |\times 2$

$\frac{(x-1)^2-1^2}{(1-x)(1+x)(x-3)}\geq 0$

$\frac{(x-1-1)(x-1+1)}{(1-x)(1+x)(x-3)}\geq 0$

$\frac{(x-2)(x)}{(1-x)(1+x)(x-3)}\geq 0$

−1 0 1 2 3

Ответ: $(-\infty;-1)\cup[0;1)\cup[2;3)$.

(+)

№5

$$\sin^2\alpha\cdot\cos^6\alpha\le\frac{27}{256}$$

$$(1-\cos^2\alpha)\cos^6\alpha-\frac{27}{256}\le 0$$

$$\cos^6\alpha-\cos^8\alpha-\frac{27}{256}\le 0$$

$\cancel{\cos^6\alpha}$

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

Вариант 2.
Задание 4.

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
0	0	0	0	+	0	±	0	2

$$\frac{(2^{x^2-2x}-8)(|3+2x|-|x-2|)}{|x^2-1|-3}>0$$

Область допустимых значений:

$x\neq 2$; $x\neq -2$ Упростим выражение:

$$\frac{2^{x^2-2x}|3+2x|-2^{x^2-2x}|x-2|-8|3+2x|+8|x-2|}{|x^2-1|-3}>0$$

$$\frac{2^{x^2-2x}(|3+2x|-|x-2|)-8(|3+2x|-|x-2|)}{|x^2-1|-3}>0$$

$$\frac{(|3+2x|-|x-2|)(2^{x^2-2x}-8)}{|x^2-1|-3}>0$$

Разбиваем неравенство на системы:

$$\begin{cases}(|3+2x|-|x-2|)(2^{x^2-2x}-8)>0\\ |x^2-1|-3>0\end{cases}\qquad \begin{cases}(|3+2x|-|x-2|)(2^{x^2-2x}-8)<0\\ |x^2-1|-3<0\end{cases}$$

Решение 1-ой системы:

$$\begin{cases}x\in(-\infty;-5)\cup(-1;-\frac{1}{3})\cup(3;+\infty)\\ x\in(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)\end{cases}$$

Решение 2-ой системы:

$$\begin{cases}x\in(-5;-1)\cup(-\frac{1}{3};3)\\ x\in(-2;2)\end{cases}$$

Согласуем решение систем с ОДЗ.

$x\in(-\infty;-5)\cup(3;+\infty)$

$x\in(-2;1)\cup(-\frac{1}{3};2)$

В итоге приходим к ответу с учётом ОДЗ

$x\in(-\infty;-5)\cup(-2;-1)$
$\cup(-\frac{1}{3};2)\cup(3;+\infty)$

Ответ: $x\in(-\infty;-5)\cup(-2;-1)\cup(-\frac{1}{3};2)\cup(3;+\infty)$

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

Задание 7

$x^2 - x = 1111122222$

$x^2 - x - 1111122222 = 0$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1111122222)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{1 \pm \quad 1 + \sqrt{4444488888}}{2}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{4444488889}}{2}$$

$$x = \frac{1 \pm 66667}{2}$$ √ ?

$\Rightarrow x = 33334$

$x = -33333$

Ответ: $x = 33334$, $x = -33333$

Вариант 3

Место для «скрепки»

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2018 03 марта 2018г. (очный тур)

Место проведения РУТ (МИИТ) - г. Москва

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№4

±

0 | 0 | 0 | 0 ± | ∓ | 0 | -+ | +

Σ = 2

$$\frac{(4^x-16)(|x^2-3x|-2)}{|2x-3|-|x+1|} \geq 0$$

$$\frac{(4^x-16)(|x^2-3x|-2)}{|2x-3|-|x+1|} = 0$$

$4^x = 16$ $\quad$ $|x^2-3x| = 2$ $\quad$ $|2x-3| \neq |x+1|$

$x = 2$ $\quad$ $\left[\begin{array}{l} x^2-3x=2 \\ x^2-3x=-2 \end{array}\right.$ $\quad$ $\left[\begin{array}{l} 2x-3 \neq x+1 \\ 2x-3 \neq -1-x \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x = \frac{3\pm\sqrt{17}}{2} \\ x = 1;\ 2 \end{array}\right.$ $\quad$ $\left[\begin{array}{l} x \neq 4 \\ x \neq \frac{2}{3} \end{array}\right.$

$x^2-3x-2=0$

$D = 9+2\cdot 4 = 17$

$x_{1,2} = \frac{3\pm\sqrt{17}}{2} \approx 4..$

$\approx 3,5; -0,5$

$x \approx 0,7$

$+ \quad - \quad + \quad + \quad - \quad +$

$\frac{3-\sqrt{17}}{2} \quad \frac{2}{3} \quad 1 \quad 2 \quad \frac{3+\sqrt{17}}{2} \quad 4 \quad x$

?

Ответ: $x \in \left[\frac{3-\sqrt{17}}{2}; \frac{2}{3}\right) \cup [1; 3] \cup (4; +\infty)$

Ответ не согласуется с решением

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№8. $a \in (0;1) \cup (1;+\infty)$

$a = ?$ $a > 1$ ОДЗ: a входит в условие $\Rightarrow \boxed{a > 1}$

$y = a^x$ кас. $y_2 = x$.

Т.к. прямая - кас., то по г. с. пр.

$y'(a^x) = k_{кас.} = 1$. Помимо этого, касательная имеют общую точку x_0 с гр. функции $\Rightarrow$

$y(a^{x_0}) = y(x_0)$. Имеем систему:

$$\begin{cases} a^{x_0} = x_0 \\ a^{x_0} \cdot \ln a = 1. \end{cases} \quad \begin{cases} a^{\log_a \log_a e} = \log_a \log_a e \\ x_0 = \log_a(\log_a e) \end{cases}$$

$a^{x_0} = \frac{1}{\ln a}$; $a^{x_0} = \log_a e \,|\, (\log_a)$

$x_0 = \log_a(\log_a e)$

$\log_a e = \log_a \log_a e \overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow} e = \log_a e$;

$a^e = e$

$a = \sqrt[e]{e} > 1$

$e \approx 2{,}71$

Ответ: $a = \sqrt[e]{e}$

+

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы ~~и не~~ складывайте их пополам.

№5.

7

$4 tg 5^0 \cdot tg 9^0$ и $3 tg 6^0 \cdot tg 10^0$

$2 \sin\alpha \sin\beta = \sin\alpha \cdot \sin\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta + \cos\alpha\cos\beta - \cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$

Аналогично $\cos\alpha \cdot \cos\beta = \cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)$

Пусть $tg\, 5^0 = tg\,\alpha$, $tg\, 9^0 = tg\,\beta$

тогда $tg\, 6^0 = tg(\alpha+1)$; $tg\, 10^0 = tg(\beta+1)$

Преобразуем выражение:

$4 \cdot \frac{\sin\alpha \sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}$ и $3 \cdot \frac{\sin(\alpha+1)\sin(\beta+1)^\circ}{\cos(\alpha+1)\cdot\cos(\beta+1)}$

$\sin 1^0$ очень мал $\approx 0{,}00\ldots \approx 0$.

$\cos 1^0$ близок к $\cos 0^0$ и аналогично ≈ 1.

$4 \frac{\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))}{\frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)}$ и $3 \cdot \frac{\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta+2))}{\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta+2))}$

$\cos(\alpha-\beta) = a$ неверно

$\cos(\alpha+\beta) = b$

$\cos(\alpha+\beta+2) = \cos(\alpha+\beta)(\cos^2 1 - \sin^2 1) - \sin(\alpha+\beta)\cdot 2\cdot\sin 1\cdot\cos 1 = \cos(\alpha+\beta) \neq b$.

$= \frac{4\cdot(a-b)}{a+b}$ и $\frac{3\cdot(a-b)}{a+b}$

тогда необходимо сравнить с нулём выражение $\frac{4(a-b)}{a+b} - \frac{3(a-b)}{a+b} =$

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

Вариант 1

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
+	+	+	+	∓	+	+	0	6

№1.

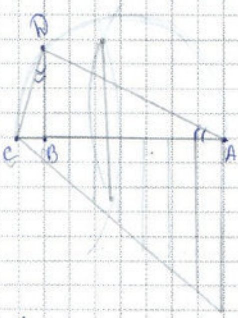
1) Построим прямую AB

2) В другую сторону отложим отрезок, равный $\frac{1}{7}$ AB

3) С помощью циркуля проведём 2 окружности и отметим точки пересечения. Через точки пересечения проведём прямую.

4) На отрезке AC построим полуокружность

5) Из точки B восстановим перпендикуляр до пересечения с окр.



$BD = \sqrt{BC \cdot AB}$

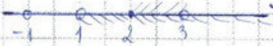
$BD = \sqrt{7}$.

6 баллов

+

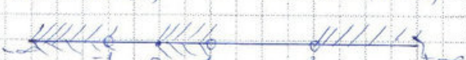
№4 $\dfrac{|x-1|-1}{(1-x^2)(3^x-27)} \geq 0$ ОДЗ: $x \neq 1$; $x \neq -1$; $x \neq 3$

1) $\begin{cases} x-1 \geq 0, \\ \dfrac{x-1-1}{(1-x)(1+x)(3^x-27)} \geq 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x \geq 1, \\ \dfrac{x-2}{(1-x)(1+x)(3^x-27)} \geq 0 \end{cases}$;



$x \in [2;3)$

2) $\begin{cases} x-1 < 0, \\ \dfrac{-x+1-1}{(1-x)(1+x)(3^x-27)} \geq 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x < 1, \\ \dfrac{-x}{-(x-1)(x+1)(3^x-27)} \geq 0 \end{cases}$;



$x \in (-\infty;-1) \cup [0;1)$

Объединив все решения, получим: $x \in (-\infty;-1) \cup [0;1) \cup [2;3)$

Ответ: $x \in (-\infty;-1) \cup [0;1) \cup [2;3)$

+

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

$= \frac{a^2-b^2}{\underbrace{(a+b)^2}_{\geq 0}}$; $a^2-b^2 = \cos^2 4^0 - \cos^2 14^0$

Функция косинус убывает при $x \in [0, 90] \Rightarrow \cos 4 > \cos 14^0 \Rightarrow$

$\cos^2 4^0 - \cos^2 14^0 > 0 \Rightarrow 4 tg 5^0 tg 9^0 > 3 tg 6^0 tg 10^0$

Ответ: $4 tg 5^0 tg 9^0 > 3 tg 6^0 tg 10^0$.

Неверно

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№7.

$$x^2 + x - \underbrace{111\ldots}_{10 р}\underbrace{222\ldots}_{10 р} = 0$$

—

По т. Виета:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -1 \\ x_1 \cdot x_2 = 111\ldots222\ldots \end{cases}$$

Значит числа ~~отличаются~~ десятизначные и отличаются только последней цифрой. Чтобы первая цифра = 1, нужно чтобы оба корня начинались с 1 =>

неверно

$x_1 = 1111111111$

$x_2 = 1111111112$

Ответ: $x_1 = 1111111111$

$x_2 = 1111111112$

ответ неверный

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№4 Вариант №3

(+)

$$\frac{(4^x-16)(|x^2-3x|-2)}{|2x-3|-|x+1|}\geq 0$$

0	0	0	+	0	∓	0	+

$\Sigma = 2$

$|2x-3|-|x+1|\neq 0$

$|2x-3|\neq |x+1|$

$\left[\begin{array}{l} 2x-3\neq |x+1| \\ 2x-3\neq -|x+1| \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x+1\neq 2x-3 \\ x+1\neq -2x-3 \\ -(x+1)\neq 2x-3 \\ -(x+1)\neq -2x+3 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x\neq 4 \\ 3x\neq 2 \\ 3x\neq 2 \\ x\neq 4 \end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{l} x\neq 4 \\ x\neq \frac{2}{3} \end{array}\right.$

$(4^x-16)(|x^2-3x|-2)=0$

$4^x=16$

$x=2$

$|x^2-3x|-2=0$

$|x^2-3x|=2$

$\left\{\begin{array}{l} x^2-3x=2 \\ x^2-3x=-2 \end{array}\right.$

Регистрация №58250

$x^2-3x-2=0$ $\qquad$ $x^2-3x+2=0$

$D=9-4\cdot1\cdot(-2)=17$ $\qquad$ $D=9-4\cdot1\cdot2=1$

$x=\frac{3-\sqrt{17}}{2}$ $\quad$ $x=\frac{3+\sqrt{17}}{2}$ $\qquad$ $x=1$ $\quad$ $x=2$

$-\quad+\quad-\quad+\quad+\quad-\quad+$

$\frac{3-\sqrt{17}}{2}\quad\frac{2}{3}\quad 1\quad 2\quad\frac{3+\sqrt{17}}{2}\quad 4$

Ответ: $\left[\frac{3-\sqrt{17}}{2};\frac{2}{3}\right)\cup\left[1;\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right]\cup(4;+\infty)$

№3

$a>1$ $\quad$ $y=a^x$ $\quad$ $y=x$

Напишем уравнение касательной.

$y=y_0+f'(x_0)(x-x_0)$

$y=a^{x_0}+a^{x_0}\cdot\ln a(x-x_0)$

$y=a^{x_0}\ln a\cdot x-a^{x_0}-a^{x_0}\ln a x_0$

$\begin{cases}a^{x_0}\ln a=1\\ a^{x_0}(1-\ln a x_0)=0\end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases}\ln a\cdot x_0=1\\ a^{x_0}\cdot\ln a=1\end{cases}$ $\quad$ $x_0=\frac{1}{\ln a}$

$\begin{cases}x=\log_a e\\ a^{\log_a e}\ln a=1\end{cases}\Rightarrow e\ln a=1$ $\quad$ $\ln a=\frac{1}{e}$

$a=e^{\frac{1}{e}}$

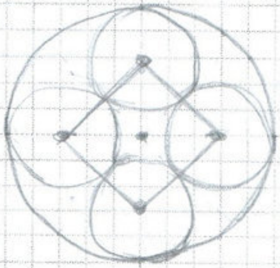
Ответ: $a=e^{\frac{1}{e}}$

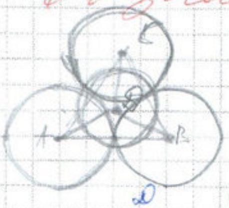
+

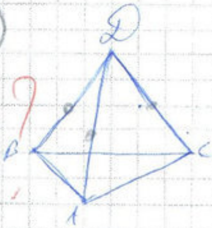
Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№6

Чертеж не объяснен. Обозначения тоже.





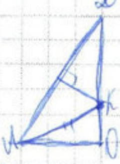


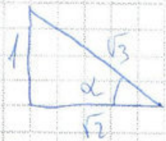
?

?

$AO = \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{3} : 2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$





$\cos\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$

$R_1 = \frac{1}{\cos\alpha} = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

+

$R_{окр} = \frac{\sqrt{6}}{2} + 1$

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{2} + 1$

Решение несвязно

N 4 Вариант 4

$$\frac{(2^x-4)(|x^2-2x|-3)}{|3-x|-|x+1|}\geq 0 \qquad ОДЗ: x\neq 1$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{I}\begin{cases}(2^x-4)(|x^2-2x|-3)\geq 0\\ |3-x|-|x+1|\geq 0\end{cases}\\ \text{II}\begin{cases}(2^x-4)(|x^2-2x|-3)\leq 0\\ |3-x|-|x+1|<0\end{cases}\end{array}\right.$$

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
–	0	0	±	0	0	+	0	2 б

2 балла

1) $(2^x-4)(|x^2-2x|-3)\geq 0$

$|x^2-2x|\geq 0$

$(2^x-4)(x^2-2x-3)\geq 0$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2^x-4\geq 0\\ x^2-2x-3\geq 0\end{cases}\\ \begin{cases}2^x-4\leq 0\\ x^2-2x-3\leq 0\end{cases}\end{array}\right.$$

$\begin{cases}2^x-4\geq 0\\ x^2-2x-3\geq 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x\geq 2\\ x\leq -1;\ x\geq 3\end{cases}$

$\begin{cases}2^x-4\leq 0\\ x^2-2x-3\leq 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x\leq 2\\ x\in[-1;3]\end{cases}$

$-1 \quad 2 \quad 3 \quad x$ $\quad x\in[-1;2],\ [3;+\infty)$

$|x^2-2x|<0$

$(2^x-4)(-x^2+2x-3)\geq 0$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2^x-4\geq 0\\ -x^2+2x-3\geq 0\end{cases}\\ \begin{cases}2^x-4\leq 0\\ -x^2+2x-3\leq 0\end{cases}\end{array}\right.$$

~~$\begin{cases}2^x-4\leq 0\\ x^2-2x-3\leq 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x\leq 2\end{cases}$~~

$\begin{cases}2^x-4\geq 0\\ -x^2+2x-3\geq 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x\geq 2\\ x\in\varnothing\end{cases}$ система решен. не имеет

$\begin{cases}2^x-4\leq 0\\ -x^2+2x-3\leq 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x\leq 2\\ x\in R\end{cases}$

$2 \quad x$

$x\in(-\infty;2]$

$-1 \quad 2 \quad 3 \quad x$ $\quad x\in[-1;2]$

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

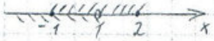
$|3-x|-|x+1|>0$

$|3-x|>|x+1|$

$3-x>x+1$

$-2x>-2$

$x<1$



$x\in[-1;1)$ - решение I системы

2) $(2^x-4)(|x^2-2x|-3)\leq 0$

$|x^2-2x|\geq 0$ $\qquad$ $|x^2-2x|<0$

$(2^x-4)(x^2-2x-3)\leq 0$ $\qquad$ $(2^x-4)(-x^2+2x-3)\leq 0$

$\begin{cases} 2^x-4\leq 0 \\ x^2-2x-3\geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x\leq 2 \\ (x+1)(x-3)\geq 0 \end{cases}$ $\qquad$ $-x^2+2-3<0$ при $x\in R$

$2^x-4\geq 0$

$x\geq 2$

$x\in[-1,2]$

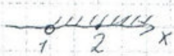
$x=2$

$|3-x|-|x+1|<0$

$3-x<x+1$

$2x>2$

$x>1$



$x=2$ - решение II системы

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

$\left[\begin{array}{l} x \in [-1;1) \\ x = 2 \end{array}\right.$ - решение ~~нер~~ неравенства

Ответ: $x \in [-1;1); \{2\}$. ??

N1

1) поставить циркуль железным концом в вершину параболы и начертить окружность произвольного радиуса

2) соединить между собой две точки, в которых окружность коснётся ветвей параболы - получится отрезок

3) с помощью линейки найти середину отрезка и провести прямую через эту середину и вершину параболы

4) на полученной прямой (оси ординат) измерить расстояние от вершины параболы до середины отрезка и отложить отрезок такой же длины, из вершины параболы в другую сторону по оси Oy

5) провести прямую из точки пересечения ветви параболы и окружности, параллельную оси ординат, получим еще ~~две~~ одну точку пересечения, уже окружности с ~~отрезком~~ прямой, получим отрезок

6) ~~соединим полученные точки~~ на полученном отрезке отметим середину

7) ~~соединим~~ проведём прямую через эту середину отрезка и вершину параболы; эта прямая - ось абсцисс

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

N 7

$x^2+x=111111222222$

$x^2+x-111111222222=0$

$D=1-4(-111111222222\cdot 1)=444444888889=t^2$, где $t=\sqrt{D}$

числом t будет какое-то шестизначное число, заканчивающееся на 3 или 7, пусть разряд сотен тысяч будет 7, тогда $7^2=49$, а у D это 44 => число в разряде сотен тысяч это 6; попробуем взять ещё 6: $66^2=4356$; ещё 6 $666^2=443556$; видим, что с шестерками получается число, примерно равное дискриминанту; попробуем сразу взять пять шестёрок, а шестой цифрой будет сначала 3, потом 7; подставив 3, заметим, что при возведении числа 666663 в квадрат пятой цифрой будет 6, значит остается цифра 7; действительно, $666667^2=444444888889$

$x_1=\dfrac{-1-666667}{2}=333334$

$x_2=\dfrac{-1+666667}{2}=333333$

Ответ: 333333; 333334

+

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

Вариант №2

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
0	0	+	−	−	+	−		2

№4. $\dfrac{(2^{x^2-2x}-8)(|3+2x|-|x-2|)}{|x^2-1|-3} > 0.$

Решим нер-во обобщ-ым методом интервалов.

$\dfrac{(2^{x^2-2x}-8)(|3+2x|-|x-2|)}{|x^2-1|-3} = 0$

$2^{x^2-2x}-8=0$

$2^{x^2-2x}=8$

$2^{x^2-2x}=2^3$

$x^2-2x-3=0$

$x_1=-1$

$x_2=3.$

$|3+2x|-|x-2|=0$

$|3+2x|=|x-2|$

$x_3=-5 \quad x_4=-\frac{1}{3}$

$\cancel{x_3=-5}$

$|x^2-1|-3\neq 0$

$|x^2-1|\neq 3.$

$x^2-1\neq 3.$

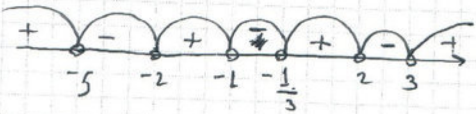
$x^2\neq 4$

$x_5\neq 2$

$x_6=-2$

$x^2-1\neq -3$

$x^2\neq -2$ р.и.



при $x=1$. $\dfrac{-7,5\cdot 4}{-3}>0$

$10>0.$

Ответ: $x\in(-\infty;-5)\cup(-2;-1)\cup(-\frac{1}{3};2)\cup(3;+\infty)$

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№7

$x^2 + x = 1111111122222222$

$x^2 + x - 1111111122222222 = 0$

По т. Виета получим

$x_1 + x_2 = -1$ и $x_1 \cdot x_2 = 1111111122222222$

Таким образом, корни уравнения равны:

$x_1 = 33333333$ $x_2 = -33333334$

Ответ: $x_1 = 33333333$ и $x_2 = -33333334$

+

№5

$\sin^2\alpha \cos^6\alpha \leq \frac{27}{256}$

$\frac{27}{256} = \frac{3^3}{2^8} = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \frac{1}{4}$

$(\sin^2\alpha)(\cos^6\alpha) = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3$

$\begin{cases} \sin^2\alpha = \frac{1}{4}, \\ \cos^6\alpha = \left(\frac{3}{4}\right)^3; \end{cases}$ или $\begin{cases} \sin^2\alpha = \left(\frac{3}{4}\right)^3, \\ \cos^6\alpha = \frac{1}{4}; \end{cases}$ нет один. углов

$\begin{cases} \sin\alpha = \pm\frac{1}{2} \\ \cos^2\alpha = \frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin\alpha = \frac{1}{2}, \\ \sin\alpha = -\frac{1}{2}; \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \end{array}\right. \end{cases}$ $f(y) < \frac{27}{256}$,

все эти значения соответствуют одним и тем же углам во всех координатных четвертях, что и требовалось доказать.

+

№2

$f(x) + x f\left(\frac{x}{2x-1}\right) = 2$ $x_2 = \frac{x}{2x-1}$ $x = \frac{x_2}{2x_2-1}$

$f\left(\frac{x_2}{2x_2-1}\right) + \frac{x_2}{2x_2-1} f(x_2) = 2$ $\Leftrightarrow$

№7. $x^2 - x = 1111122222$.

$x^2 - x - 1111122222 = 0$

$D = 4444488889$

$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{D}}{2a}$.

т.к. число зак-ся на 89 => и имеет 10 цифр => $\sqrt{D}$ - 5-ти значное число кот. ок-ся либо на 7 либо на 3.
Т.к. число начин-ся на 44 => Каше 5-ти значное число начинается на 6.
Проверим 2 числа 63 и 67.
$63^2 = 3969$ $67^2 =$ ~~4488~~ 4489 => число зак-ся на 67.
Проверим число 667, $667^2 = 444889$ =>
~~5-ти~~ значно $\sqrt{D} = 66667$.

$x_1 = \frac{1 + 66667}{2} = 33334$

$x_2 = \frac{1 - 66667}{2} = -33333$

Ответ: $x_1 = 33334$, $x_2 = -33333$.

№8. $x^2+2ax+2a^2+4a+3=0$

$(x+a)^2+(a+3)(a+1)=0$

уравнение будет равно 0, когда ??

оба выр-ия равны 0. =>

$(x+a)^2=0$ | $(a+3)(a+1)=0$

при $a=-3$ при $a=-1$ $a=-3$ $a=-1$.

$x=3$ $x=1$.

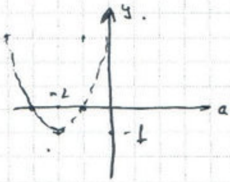
Также т.к $(x+a)^2$ – всегда пол-ое =>

$(a+3)(a+1)$ – должно быть отр-ым, причем

a – целое число.

$a_0=-2$.

$y(a_0)=-1$.



=>

~~при $a=-2$. $x=3$.~~

~~$x=1$.~~

$(x+a)^2=1$.

$(x-2)^2=1$.

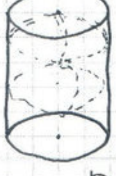
$x^2-4x+3=0$

$x=1$ $x=3$. =>

Ответ: при $a=-2$, сумма кв-ов корней ур-ия будет наиб-ей и равна 13. ~~Ответ~~.

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№6.



- Вид спереди.

т.к $R_{сф} = 1 \Rightarrow S_{кр} = \pi$. , $S_{кв\text{-}та} = 4$.

$\frac{1}{3} V_{ц\text{-}ра} = 8$. , $V_{ц\text{-}ра} = 24$.

Ответ: $V = 24$.

№7. Дано: $\sqrt{5}$

построим круг с $R = \sqrt{5}$. поделим его на 4 равных сектора. Соединим вершины во 2 и 4 секторах через центр окр проведем линию $\perp$ соединеным вершинам. назовем ее AD

R_1R_2 ~~AD~~ $= \sqrt{10}$, т.к. в полученом $\triangle R_1OR_2$ - прямоуг-ный и равнобедр-ный $\Rightarrow$ ~~перпенд-ор к гипот-зе делит гипо-зу пополам.~~ по теореме Пифагора $R_1R_2 = \sqrt{10}$.

$\left.\begin{array}{l}\sqrt{10} \text{ можно предст-ть как } 3^2+1^2, \\ \sqrt{5} \text{ можно представить как } 2^2+1^2.\end{array}\right\} \Rightarrow$

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

Расстояние между $\sqrt{10}$ и $\sqrt{5}$ будет равно ?

1. $\Rightarrow$ ~~Двоим~~ Отмеряем циркулем

$\sqrt{5}$ $\sqrt{10}$ ✓ это расстояние и строим

окр. с $R=1$ и $d=2$, $d=2$

2. Θr^2 искомый отрезок

№ 5.

$$0 < x < \frac{\pi}{4}. \qquad \frac{\cos x}{(\sin^2 x)(\cos x - \sin x)} > 8$$

$$\frac{\cos x - 8\sin^2 x - 8\cos x + 8\sin x}{(\sin^2 x)(\cos x - \sin x)} > 0$$

$$\frac{8\sin^2 x + 7\cos x - 8\sin x}{(\sin^2 x)(\cos x - \sin x)} < 0$$

$$\frac{8\sin^2 x + 7\cos x - 8\sin x}{(\sin^2 x)(\cos x - \sin x)} = 0$$

$$8\sin x(\sin x - 1) + 7\cos x = 0$$

$$8\sin x(\sin x - 1) = -7\cos x \quad |:\cos x$$

$$8\,tg x(\sin x - 1) = -7.$$

$$8\,tg x = -7$$

$$tg x = -$$

Место для скрепки

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

Вариант 3

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
0	+	0	0	0	−	+	−	2

№2

$$f(x)=\frac{1}{1-x}$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{1-\frac{1}{x}}=\frac{1}{(x-1)/x}=\frac{x}{x-1}$$

$$(x-1)\cdot\frac{1}{1-x}+\frac{x}{x-1}=\frac{1}{x-1}$$

$$(x-1)^2\cdot\frac{1}{1-x}+(x-1)\cdot\frac{x}{x-1}=1$$

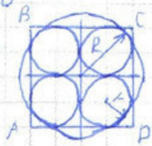
$$(1-x)^2\cdot\frac{1}{1-x}+x=1$$

$$1-x+x=1$$

$$1=1$$

Ответ: $f(x)=\frac{1}{1-x}$

№6



$$R=\frac{AC}{2}+2r$$

$$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{2\cdot 4^2}=\sqrt{2}\cdot 4$$

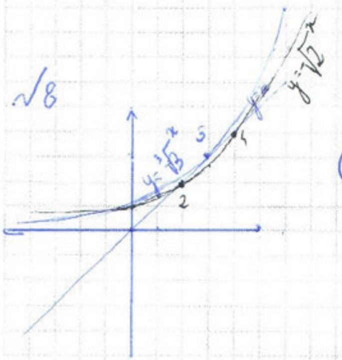
$AB=BC=4r$

$r=1$

$$R=\frac{\sqrt{2}\cdot 4}{2}+2=2\sqrt{2}+2$$

Ответ: $R=2\sqrt{2}+2$

№8



Ответ: $a=\sqrt[3]{3}$?

Место для скрепки

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№7

$x^2+x=11111111112222222222$

$x^2+x=x(x+1)$

$11111111112222222222=1111111111\cdot10000000002=$

$3333333333\cdot3333333334$

$x(x+1)=3333333333\cdot3333333334$

Ответ: $x_1=3333333333$

$x_2=-3333333334$

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

7\. $x^2+x=1111111111222222222$ Вар. -3

$x^2+x-1111111111222222222=0$

$D=1+4444444444888888888=4444444444888888889$

$\sqrt{44.44.44.44.44.88.88.88.88.89} = 6666.666667$

36

844 − 756

8844 − 7956

88844 − 79956

888844 − 799956

8888888 − 7999956

88893288 − 7999956

889333288 − 79999956

9333333289 − 9333333289

0

$126 \times 6 = 756$

$1326 \times 6 = 7956$

$13326 \times 6 = 79956$

$133326 \times 6 = 799956$

$1333326 \times 6 = 7999956$

$13333326 \times 6 = 79999956$

$133333326 \times 6 = 799999956$

$1333333326 \times 6 = 7999999956$

$13333333327 \times 7 = 93333333289$

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
−	+	−	∓	0	0	+	0	2

$x_1=\dfrac{-1+6666.666667}{2}=333333.3333$

$x_2=\dfrac{-1-6666.666667}{2}=-3333333334$

Ответ: 3333333333; −3333333334

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

3. $\log_3(x-y+3z-1)+\log_3(2x+2y-2z-3)+\log_3(7-3x-y-z)>$
$>x^2+x-6$

1. $x-y+3z-1+2x+2y-2z-3+7-3x-y-z=$
$=\cancel{3z}-\cancel{3z}+\cancel{3x}-\cancel{3x}-\cancel{2y}+\cancel{2y}+3=3$

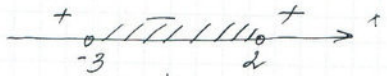
т.е. $x=y=z=1$, тогда ??

$0_x>x^2+x-6$

Найдем нули функции

$x_1=-3$

$x_2=2$



$x=-2;-1;0;1.$

При $x=-2$; $\log_3(-2-y+3z-1)+\log_3(-4+2y-2z-3)+\log_3(7-y-z+6)>4+(-2)-6$;

$\log_3(3z-y-3)+\log_3(2y-2z-7)+\log_3(13-y-z)>-4$

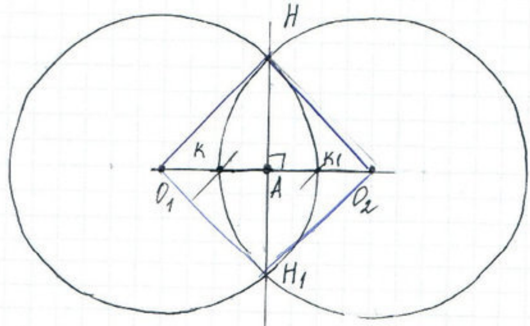
$z=-y+13$

$\log_3(-3y+39-y-3)+\log_3(2y+2y-26-7)+\log_3(13-y+y-13)>-4$

$\log_3(-4y+36)+\log_3(4y-33)+\log_3 0>-4$

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

1.



1. На заданных расстояниях O_1A и O_2A от точки A построить две окружности.

2. Точки пересечения окружностей $(O_1;r)$ и $(O_2;r)$ – H и H_1.

H равноудалена от O_1 и O_2, также т.A равноудалена от O_1 и O_2 => все точки отрезка HA равноудалены от отрезков HO_1 и HO_2. => HA - биссектриса $\angle O_1HO_2$.

3. $O_1K_1 = O_2K$, т.к. это радиусы, заданные изначально одинаковыми

$O_1K_1 - KK_1 = O_1K$

$O_2K - KK_1 = O_2K_1$ => $O_1K = O_2K_1$;

4. $AK = AK_1$, т.к. A - центр симметрии.

5. $O_1K + AK = A_1K_1 + O_2K_1 \Rightarrow O_1A = AO_2 \Rightarrow$

HA также является медианой, провед. из $\angle O_1HO_2$.

6. $O_1O_2 \perp HH_1$, т.к. $O_2HO_1H_1$ - ромб ($HO_2 = O_2H_1 = O_1H = O_1H_1 = r$); => HA - также высота $\angle O_1HO_2$

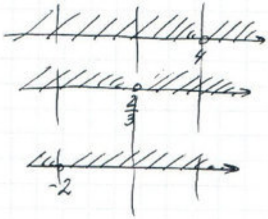
Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

4. $$\frac{(4^x-16)(|x^2-3x|-2)}{|2x-3|-|x+1|} \geq 0$$

I. $\begin{cases} (2x-3)-(x+1)\neq 0 \\ 2x+3-(x+1)\neq 0 \\ (2x-3)-(-x-1)\neq 0 \\ -2x-3-(-x-1)\neq 0 \end{cases}$

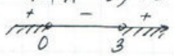
0.Д.З.

$\begin{cases} 2x-3-x-1\neq 0 \\ -2x+3-x-1\neq 0 \\ 2x-3+x+1\neq 0 \\ -2x-3+x+1\neq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x\neq 4 \\ x\neq \frac{2}{3} \\ x\neq \frac{2}{3} \\ x\neq -2 \end{cases}$



III $x^2-3x>0$

$x(x-3)>0$



$x(-\infty;0)\cup(3;+\infty)$

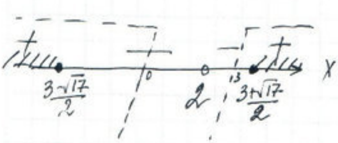
$$\frac{(4^x-16)(x^2-3x-2)}{2x-3-x+1}\geq 0$$

$\begin{cases} (4^x-16)(x^2-3x-2)=0 \\ x-2\neq 0. \end{cases}$

$(4^x-16)=0$; $x^2-3x-2=0$

$x=2$; $x=\frac{3+\sqrt{17}}{2}$

$x=\frac{3-\sqrt{17}}{2}$

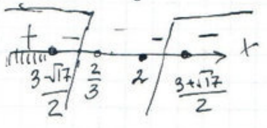


$$\frac{(4^x-16)(x^2-3x-2)}{-2x+3-x-1}\geq 0$$

$\begin{cases} (4^x-16)(x^2-3x-2)=0 \\ -3x+2\neq 0 \end{cases}$

$4^x-16=0$; $x^2-3x-2=0$

$\begin{cases} x=2; \; x=\frac{3+\sqrt{17}}{2} \\ x=\frac{3-\sqrt{17}}{2} \\ x\neq \frac{2}{3} \end{cases}$

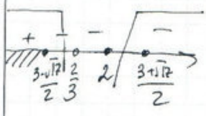


$$\frac{(4^x-16)(x^2-3x-2)}{2x-3+x+1}\geq 0$$

$\begin{cases} (4^x-16)(x^2-3x-2)=0 \\ 3x-2=0 \end{cases}$

$\begin{cases} x=2; \; x=\frac{3+\sqrt{17}}{2} \\ x=\frac{3-\sqrt{17}}{2} \end{cases}$

$x\neq \frac{2}{3}$



$$\begin{cases} f(x)+xf\left(\frac{x}{2x-1}\right)=2 \\ f\left(\frac{x}{2x-1}\right)+\frac{x}{2x-1}f(x)=2 \end{cases} \Rightarrow f(x)=\frac{4x-2}{x-1}$$

Таким образом $f(x)$, удовлетворяющая исходному уравнению равна $f(x)=\frac{4x-2}{x-1}$ +

Ответ: $f(x)=\frac{4x-2}{x-1}$

№3. $\log_2(2x-2y+3z-3)+\log_2(4z-x-3y)+\log_2(5y-x-7z+6)>y^2-4y$

1) $\begin{cases} 2x-2y+3z-3>0, \\ 4z-x-3y>0, \\ 5y-x-7z+6>0; \end{cases}$ $-\begin{cases} 2x-2y+3z-3=0, \\ 4z-x-3y=0, \\ 5y-x-7z+6=0; \end{cases}$

$\begin{cases} x=4z-3y, \\ 2(4z-3y)-2y+3z-3=0, \\ 5y-4z+3y-7z+6=0; \end{cases}$

$\begin{cases} x=4z-3y, \\ 8z-6y-2y+3z-3=0, \\ 8y-11z+6=0; \end{cases}$

$+\begin{cases} x=4z-3y, \\ 8z-8y+3z-3=0, \\ 8y-11z+6=0; \end{cases}$ $\begin{cases} x=4z-3y, \\ -3z+3=0; \end{cases}$ +

$\begin{cases} x=4\cdot1\cdot\frac{5}{8}=4-1\frac{7}{8}=2\frac{1}{8}, \\ y=\frac{5}{8}, \\ z=1; \end{cases}$

2) Так как x, y, z – целые числа, тогда получим:

$\begin{cases} 2x-2y+3z-3\geq1, \\ 4z-x-3y\geq1, \\ 5y-x-7z+6\geq1, \end{cases}$ $\begin{cases} 2x-2y+3z-3=1, \\ 4z-x-3y=1, \\ 5y-x-7z+6=1; \end{cases}$ $y^2-4y<0 \Leftrightarrow \begin{cases} y>0 \\ y<4 \end{cases}$, след. $y=1;2;3$.

3) $\begin{cases} 2x-2y+3z-3\geq1, \\ 4z-x-3y\geq1; \end{cases}$

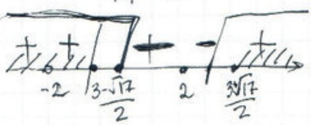
Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

$$\frac{(4^x-16)(x^2-3x-2)}{-2x-3+x+1}=0$$

$$\begin{cases}(4^x-16)(x^2-3x-2)\\ -x-2=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=2;\ x=\frac{3+\sqrt{17}}{2}\\ x=\frac{3-\sqrt{17}}{2}\end{cases}$$

$x\neq-2$



$$\left[\begin{array}{l}x\le\frac{3-\sqrt{17}}{2}\\ x\ge\frac{3+\sqrt{17}}{2}\end{array}\right.$$

$$x\le\frac{3-\sqrt{17}}{2}\Rightarrow x\in(-\infty;-2)\cup\left(-2;\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)$$

$$\left[\begin{array}{l}x<-2\\ -2<x\le\frac{3-\sqrt{17}}{2}\end{array}\right.$$

№2.

$$\left(\frac{1}{x}-1\right)\cdot f\left(\frac{1}{x}\right)+f(x)=\frac{1}{\frac{1}{x}-1}$$

$$\left(\frac{1-x}{x}\right)\cdot f\left(\frac{1}{x}\right)+f(x)=\frac{x}{1-x}$$

$$\frac{1-x}{x}\left(\frac{1}{x-1}-(x-1)f(x)\right)+f(x)=\frac{x}{1-x}$$

$$-\frac{1}{x}+\frac{(x-1)^2}{x}\cdot f(x)+f(x)=\frac{x}{1-x}$$

$$-\frac{1}{x}+\frac{(x-1)^2}{x}\cdot f(x)+f(x)=\frac{x}{1-x}$$

$$f(x)\frac{(x-1)^2+x}{x}=\frac{1}{x}-\frac{x}{x-1}=\frac{x-1-x^2}{x(x-1)}=-\frac{(x^2-x+1)}{x(x-1)}$$

$$f(x)\frac{x^2-x-1}{x}=-\frac{(x^2-x+1)}{x(x-1)}\qquad f(x)=\frac{1}{1-x}$$

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
0	0	0	±	0	–	0	+	2

№4

$$\frac{(2^{x^2-2x}-8)(|3+2x|-|x-2|)}{|x^2-1|-3} \geq 0$$

Найдём нули функции

(1) $2^{x^2-2x}-8=0$

$2^{x^2-2x}=8$

$2^{x^2-2x}=2^3$

$x^2-2x=3$

$x^2-2x-3=0$

$D=4+12=16=4^2$

$x=\frac{2\pm4}{2}=3;-1$

(2) $|3+2x|-|x-2|=0$

$(3+2x-x+2)(3+2x+x-2)=0$

$(x+5)(3x+1)=0$

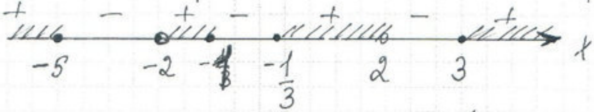
(3) $|x^2-1|-3=0$

$(x+2)(x-2)=0$

Перепишем полученное неравенство

$$\frac{(x-3)(x+1)(x+5)(3x+1)}{(x+2)(x-2)} \geq 0$$

Решим неравенство методом интервалов



$x\in(-\infty;-5]\cup(-2;-1]\cup[-\frac{1}{3};2)\cup[3;+\infty)$

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№6 В 2

Так как сферы касаются друг друга, то высота цилиндра равна сумме их диаметров.

$H = 2R + 2R + 2R = 6R = 6$

Радиус сфер равен радиусу основания цилиндра

$V = \pi R^2 \cdot H = 6\pi$

Ответ: $V = 6\pi$

№8

$x^2 + 2ax + 2a^2 + 4a + 3 = 0$

$D = 4a^2 - 4(2a^2 + 4a + 3) = 4a^2 - 8a^2 - 16a - 12$

$= -4a^2 - 16a - 12$

$D \geqslant 0$

$-4a^2 - 16a - 12 \geqslant 0$

$a^2 + 4a + 3 \leq 0$

$D = 16 - 12 = 2^2$

$a = \frac{-4 \pm 2}{2} = -3; -1$

$-3 \quad -1 \quad a$

$x_1 = \frac{-2a + \sqrt{-4a^2 - 16a - 12}}{2} = -a + \sqrt{-a^2 - 4a - 3}$

$x_2 = \frac{-2a - \sqrt{-4a - 16a - 12}}{2} = -a - \sqrt{-a^2 - 4a - 3}$

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

$$S = x_1^2 + x_2^2 = \left(-a + \sqrt{-a^2-4a-3}\right)^2 + \left(-a - \sqrt{-a^2-4a-3}\right)^2$$
$$= \left(a^2 - 2a\sqrt{-a^2-4a-3} + (-a^2-4a-3)\right) + \left(a^2 + 2a\sqrt{-a^2-4a-3} + (-a^2-4a-3)\right) = 2a^2 + 2(-a^2-4a-3) =$$
$$= 2a^2 - 2a^2 - 8a - 6 = -(6+8a)$$

$S = -(6+8a)$ - функция убывающая, следовательно нужно взять наименьшее a из области допустимых значений, чтобы получить наибольшую сумму.

$$S(-3) = -(6-24) = 24 - 6 = 18$$

Ответ: $a = -3$

$S = 18$.

Место для скрепки

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2018 03 марта 2018г. (очный тур)

Место проведения РУТ (МИИТ) - г. Москва

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

Вариант 2.

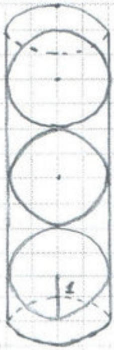
№6 $V = S_{осн} \cdot h$

$V = \pi R^2 \cdot h$

$h = 6R$

$V = 3{,}14 \cdot 1^2 \cdot 6$

$V = 18{,}84$



(–)

2 балла

№8. Ур-ние имеет корни, когда

$a^2 - (2a^2 + 4a + 3) = (a^2 + 4a + 3) \geq 0$

$-3 \leq a \leq -1$

Сумма квадратов корней: $(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (2a)^2 - 2(2a^2 + 4a + 3) =$

(+)

$= -8a - 6$

Это выражение принимает наибольшее значение при наименьшем возможном $a = -3 \Rightarrow -8 \cdot (-3) - 6 = 18$

Ответ: 18.

№7 $x^2 - x = 1111122222$

$x^2 - x - 1111122222 = 0$

$D = 4444488889$; $\sqrt{D} = 66667$ Как получено это число?

$x_{1,2} = 33334$

-33333

Ответ: $x_1 = 33334$; $x_2 = -33333$

(–)

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
–	0	0	+	0	–	–	+	2

Место для скрепки

Место проведения РУТ (МИИТ) - г. Москва

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№4. $\dfrac{(2^{x^2-2x}-8)(|3+2x|-|x-2|)}{|x^2-1|-3}>0$ $\quad x\neq 2$

$x=-2$

$\dfrac{2^{x^2-2x}\cdot|3+2x|-2^{x^2-2x}\cdot|x-2|-8x|3+2x+8\cdot|x-2|}{|x^2-1|-3}>0$

$\dfrac{2^{x^2-2x}\cdot(|3+2x|+|x-2|)-8(|3+2x|-|x-2|)}{|x^2-1|-3}>0$

$\dfrac{(|3+2x|-|x-2|)\cdot(2^{x^2-2x}-8)}{|x^2-1|-3}>0$

$\begin{cases}(|3+2x|-|x-2|)\cdot(2^{x^2-2x}-8)>0\\|x^2-1|-3>0\end{cases}$

$\begin{cases}(|3+2x|-|x-2|)\cdot(2^{x^2-2x}-8)<0\\|x^2-1|-3<0\end{cases}$

$\begin{cases}x\in(-\infty;-5)\cup(-1;-\frac{1}{3})\cup(3;+\infty)\\x\in(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)\end{cases}$

$\begin{cases}x\in(-5;-1)\cup(-\frac{1}{3};3)\\x\in(-2;2)\end{cases}$

$x\in(-\infty;-5)\cup(3;+\infty)$

$x\in(-2;-1)\cup(-\frac{1}{3};2)$ +

Ответ: $x\in(-\infty;-5)\cup(-2;-1)\cup(-\frac{1}{3};2)\cup(3;+\infty)$

№1

$AB^2=AC^2-BC^2$

$AB^2=\sqrt{5}^2-1^2$

$AB=2$

−

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

выразим x и z :

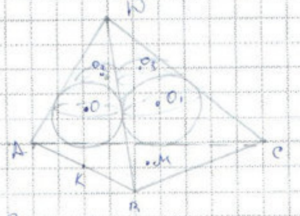
$$\begin{cases} x = \frac{13-y}{11}, \\ z = \frac{8y+6}{11}; \end{cases}$$

Таким образом, получим, что при $y=2$, $x=1$, а $z=2$

Тогда получим, что: $x=1$, $y=2$, $z=2$

Ответ: 1,2,2

№6



Дано:
ABCD-тетраэдр
$a = \frac{10}{\sqrt{6}-1}$
$r - ?$

Решение

1) Пусть r-радиус. Соединим центры шаров. Получим правильный тетраэдр со стороной 2r

2) Шары лежат внутри правильного тетраэдра, => так как они вписаны в $3^х$-гранные углы при вершинах тетраэдра, то их центры лежат на соотв. высотах тетраэдра, след. центр правильного тетраэдра совпадает вершинами в центре данных шаров.

3) O, O_1, O_2, O_3 - центры шаров, вписанных в тетраэдр

Тогда радиус шара R, который вписан в тетраэдр со стороной a равен $R = \frac{a\sqrt{6}}{12}$.

4) Таким образом, радиус шара R, вписанного в тетраэдр на r больше радиуса шара, который вписан во второй тетраэдр с ребром, равным 2r, тогда получим

$$\frac{a\sqrt{6}}{12} = \frac{2r\sqrt{6}}{12} + r,$$ отсюда имеем, что

$$r = \frac{a(\sqrt{6}-1)}{10} = 1$$

Ответ: 1

+

Место для скрепки

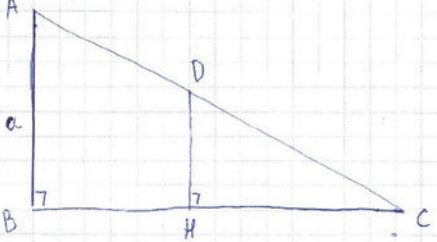
ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2018 03 марта 2018г. (очный тур)

Место проведения РУТ (МИИТ) - г. Москва

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№1

Строим прямоугольный треугольник ABC с катетами $AB = a$, $BC = 2a$, где a – произвольный отрезок. Тогда гипотенуза этого треугольника по т. Пифагора равна: $AC = a\sqrt{5}$. На гипотенузе AC отложим отрезок CD равный $\sqrt{5}$, а из точки D опустим перпендикуляр DH. Из подобия треугольников DHC и ABC, получаем что $\frac{CH}{BC} = \frac{DC}{AC}$.
Отсюда $CH = 2$



1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
+	+	+	+	+	0	0	+	6

6 баллов

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№2

Полагая, что $t=2x+3$, $x=\frac{t-3}{2}$, получим:

$$\begin{cases} f(t-1)+2\varphi(2t+1)=\frac{t-5}{2} \\ f(x-1)+\varphi(2x+1)=2x \end{cases}$$

Заменяя переменную во втором уравнении x на t, имеем систему:

$$\begin{cases} f(t-1)+2\varphi(2t+1)=\frac{t-5}{2} \\ f(t-1)+\varphi(2t+1)=2t \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, имеем $\varphi(2t+1)=\frac{t-5}{2}-2t=\frac{-3t-5}{2}$. Следовательно $f(t-1)=2t+\frac{3t+5}{2}=\frac{7t+5}{2}$. Поэтому, если $2t+1=x$, то $t=\frac{x-1}{2}$ и тогда $\varphi(x)=\frac{-3x+3-10}{4}=-\frac{3x+7}{4}$. Аналогично, обозначая $t-1=x$, имеем $f(x)=\frac{7x+12}{2}$

Ответ: $f(x)=\frac{7x+12}{2}$, $\varphi(x)=-\frac{3x+7}{4}$

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№3

Обозначим $a = 2x+3y-2z-3$, $b = 4x-y-4z+7$, $c = 6z-2y-6x-1$. По ОДЗ $a,b,c > 0$ и a,b,c целые числа. Так как $a+b+c=3$, то $a=b=c=1$.

Следовательно $6z^2-47z+77<0$. Решая это неравенство, находим, что $\begin{cases} 2x+3y=10 \\ 4x-y=6 \end{cases} \Rightarrow x=2,\ y=2.$

значит $(2,2,3)$ есть решение.

При $z=4$ получим $\begin{cases} 2x+3y=12 \\ 4x-y=10 \end{cases} \Rightarrow x=3,\ y=2$

При $z=5$ получим $\begin{cases} 2x+3y=14 \\ 4x-y=14 \end{cases} \Rightarrow y=2,\ x=4,$

значит $(4,2,5)$ – решение

Ответ: $(2,2,3)$, $(4,2,5)$, $(3,2,4)$.

серединный перпендикуляр к полученной хорде. Этот перпендикуляр и будет осью Oy, а ось Ox - это перпендикуляр к Oy в точке пересечения с параболой.

52.

$$\begin{cases} f(x)+5x\cdot f\left(\frac{1}{x}\right)=3x^3 \\ f\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{5}{x}f(x)=\frac{3}{x^3} \quad \Big| \cdot 5x;\ x\neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x)+5x\cdot f\left(\frac{1}{x}\right)=3x^3 \\ 5 + f\left(\frac{1}{x}\right)+25f(x)=\frac{15}{x^2} \end{cases} \quad \text{вычтем}$$

$$24f(x)=\frac{15}{x^2}-3x^3 \Rightarrow f(x)=\frac{15-3x^5}{24x^2};\ f(x)=\frac{5-x^5}{8x^2}$$

Отв: $f(x)=\frac{5-x^5}{8x^2}$

55.

$$0<\alpha<\frac{\pi}{2} \Rightarrow \left(\frac{1}{\sin\alpha}+1\right)\left(1+\frac{1}{\cos\alpha}\right)>5$$

$$1+\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}>5 \ \Big| \cdot \sin\alpha>0, \cdot\cos\alpha>0$$

$$\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha+\sin\alpha+1>5\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\sin\alpha+\cos\alpha+1>4\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\sin\alpha+\cos\alpha+\sin^2\alpha+\cos^2\alpha>4\sin\alpha\cos\alpha$$

$$(\sin\alpha-\cos\alpha)^2+\sin\alpha(1-\cos\alpha)+\cos\alpha(1-\sin\alpha)>0$$ верно

что и требовалось док-ть.

54. $$\frac{(2^x-4)(|x^2-2x|-3)}{|3-x|-|x+1|}\geq 0$$

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№4

Неравенство равносильно неравенству:

$$\frac{(x^2-2x-3)\left((3+2x)^2-(x-2)^2\right)}{(x^2-1)^2-3^2}>0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{(x-3)(x+1)(x+5)(3x+1)}{(x^2-4)(x^2+2)}>0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{(x-3)(x+1)(x+5)\left(x+\frac{1}{3}\right)}{(x-1)(x+2)}>0$$

Решая это неравенство методом интервалов, находим ответ: $x<-5$; $-2<x<-1$; $-\frac{1}{3}<x<2$; $x>3$.

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№5

Имеем:

$$\frac{\cos x}{\sin^2 x(\cos x-\sin x)}-8=\frac{\cos x-8\sin^2 x\cos x+8\sin^3 x}{\sin^2 x(\cos x-\sin x)}=$$

$$=\frac{1}{\sin^2 x(\cos x-\sin x)}\left(\frac{\cos x(1-8\sin^2 x)}{\sin^3 x}+8\right)\sin^3 x=$$

$$=\frac{\sin x}{\cos x-\sin x}\left/\frac{1}{\sin^3 x}\cos x(1-8\sin^2 x)+8\right/.$$

При $0<x<\frac{\pi}{4}$ $\sin x>0$, $\cos x-\sin x>0$, поэтому все три выражения $\cos x$, $\frac{1}{\sin^3 x}$, $1-8\sin^2 x$ убывают, поэтому наименьшее значение $\frac{\cos x}{\sin^3 x}(1-8\sin^2 x)$ получится при $x-\frac{\pi}{4}$ оно равно -6, следовательно

$$\frac{\cos x}{\sin^2 x(\cos x-\sin x)}>0,$$ что и требовалось доказать.

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№8

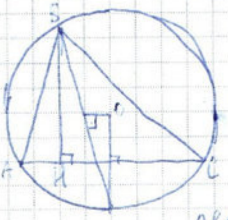
Уравнение имеет корни при неотрицательном дискриминанте: $\frac{D}{4} = -a^2-4a-3 \geqslant 0 \Leftrightarrow -3 \leqslant a \leqslant -1$.
По теореме Виета $S = x_1^2 + x_2^2 = (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 =$
$= 4a^2 - 2(2a^2+4a+3) = -8a-6$. При $-3 \leqslant a \leqslant -1$ получаем, что $2 \leqslant -8a-6 \leqslant 18$, следовательно наибольшее значение суммы равно 18 и оно достигается при $a=-3$

Ответ: $a=-3$, $S=18$

6 баллов

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

1) Рассмотрим треугольник ABC с данными высотой BH, биссектрисой BL и медианой BM.



Продолжим биссектрису BL до пересечения с описанной окружностью в точке B' (так как $\angle ABB' = \angle CBB'$, то B' - середина дуги AC). Теперь через точку M проведём перпендикуляр к хорде AC. Тогда B' (середина дуги) и точка O (центр описанной окружности) принадлежат этому серединному перпендикуляру. Таким образом, чтобы построить $\triangle ABC$, сначала надо построить треугольник BHM (по гипотенузе BM и катету BH), потом на отрезке MH отметить точку L (биссектриса всегда лежит между медианой и высотой) и найти точку B' как точку пересечения перпендикуляра к прямой HM в точке M и прямой BL. ~~Цен~~ Центр окружности O есть точка пересечения прямой MB' и серединного перпендикуляра к хорде BB'. Вершины A и C есть точки пересечения этой окружности с прямой HM.

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
+	+	+	+	0	0	+	+	6

2) Так как равенство должно выполнятся при всех x, в том числе при $x_1=\frac{1}{x}$. Тогда получаем $(\frac{1}{x}-1)f(\frac{1}{x})+f(x)=\frac{x}{-x+1}$. Объединяя это равенство с первоначальным в систему и обозначая $f(x)=y$; $f(\frac{1}{x})=z$, получим

$(x-1)y+z=\frac{1}{x-1}$

$\frac{1-x}{x}z+y=\frac{x}{1-x}$. Решая эту систему, находим, что $y=\frac{1}{1-x}$. Ответ - $f(x)=\frac{1}{1-x}$

3) Обозначим $x-y+3z-1=A$, $2x+2y-2z-3=B$, $7-3x-y-z=C$. По ОДЗ A, B, C больше нуля, но x, y, z - целые числа, следовательно A, B, C - натуральные числа. Но заметим, что $A+B+C=3$, следовательно это возможно лишь при $A=B=C=1$. А тогда получим неравенство $x^2+x-6<0$. Решая его, находим, что $-3<x<2$. Так как x - целое число, то отсюда получаем, что $x\in\{-2,-1,0,1\}$. Рассмотрим систему $A=1$, $B=1$ как систему относительно y и z при известном x. Решение этой системы $y=4-2x$, $z=2-x$ поочередно подставляя в эти равенства известные x, мы получим ответ

$\{(-2;8;4),(-1;6;3),(0;4;2),(1;2;1)\}$.

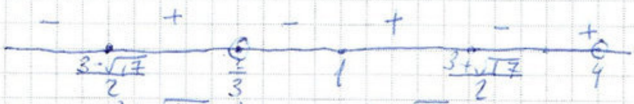
4) Данное неравенство равносильно неравенству:

$$\frac{(4^{x}-4^{2})((x^2-3x)^2-2^2)}{(2x-3)^2-(x+1)^2}\ge 0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)(x^2-3x-2)(x^2-3x+2)}{(2x-3-x-1)(2x-3+x+1)}$$

$$\ge 0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)(x-1)(x-2)(x^2-3x-2)}{(x-4)(3x-2)}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-2)^2(x-1)}{(x-4)(x-\frac{2}{3})}\cdot\left(x-\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)\cdot\left(x-\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)\ge 0.$$

Решая это неравенство методом интервалов, получим



Ответ: $\left[\frac{3-\sqrt{17}}{2};\frac{2}{3}\right)\cup\left[1;\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right]\cup(4;+\infty)$.

7) Преобразуем правую часть ~~не~~равенства, записав как: $\frac{10^{20}-1}{9}+\frac{10^{10}-1}{9}=\frac{(10^{10}-1)(10^{10}+1)}{9}+\frac{10^{10}-1}{9}=$
$=\frac{10^{10}-1}{9}(10^{10}+2)=\frac{10^{10}-1}{3}\cdot\frac{10^{10}+2}{3}$. Покажем, что число $\frac{10^{10}-1}{3}$ является корнем данного квадратного уравнения. Подставляя это число в левую часть уравнения, получаем, что

$$\left(\frac{10^{10}-1}{3}\right)^2+\frac{10^{10}-1}{3}=\frac{10^{10}-1}{3}\left(\frac{10^{10}-1}{3}+1\right)$$

$$=\frac{10^{10}-1}{3}\cdot\frac{10^{10}+2}{3},$$

что равно правой части. По теореме Виета

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

находим второй корень, он равен: $-\frac{10^{10}+2}{3}$.
Ответ: $\left\{\frac{10^{10}-1}{3}; -\frac{10^{10}+2}{3}\right\}$.

8) Условия касания графиков данных функций в точке с абсциссой x_0 будут: значения функций и производных в точке касания x_0 равны. Следовательно имеем для нахождения a и точки x_0 систему: $\begin{cases} a^{x_0}=x_0 \\ a^{x_0}\ln a=1. \end{cases}$

Тогда из второго уравнения имеем $a^{x_0}=\frac{1}{\ln a}$. Подставив это выражение в первое уравнение получим $x_0=\frac{1}{\ln a}$ и, следовательно, из второго уравнения получим уравнение $a^{\frac{1}{\ln a}}\cdot\ln a=1$. Логарифмируем это уравнение, получим

$$\frac{1}{\ln a}\ln a+\ln\ln a=0 \Rightarrow \ln(\ln a)=-1; \ln a=\frac{1}{e}; a=e^{\frac{1}{e}}$$

Проверка показывает, что это значение $a=e^{\frac{1}{e}}$ является искомым.
Ответ $a=e^{\frac{1}{e}}$.

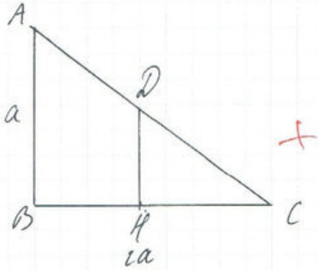
Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

6 баллов

вариант 2

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
+	4	H	+	0	0	H	+	6

№1



Построим прямоугольный треугольник ABC с катетами $AB = a$; $BC = 2a$. По теореме Пифагора гипотенуза этого треугольника $AC = a\sqrt{5}$. Отложим отрезок CD равный $\sqrt{5}$ на гипотенузе AC. Из подобия треугольников DHC и ABC, получаем, что $\frac{CH}{BC} = \frac{DC}{AC}$. Отсюда $CH = 2$

+

№2.

Полагая, что $t = 2x + 3$ $x = \frac{t-3}{2}$, получим:

$f(t-1) + 2\varphi(2t+1) = \frac{t-5}{2}$

$f(x-1) + \varphi(2x+1) = 2x$

+

Заменяя переменную во втором уравнении x на t, имеем систему:

$f(t-1) + 2\varphi(2t+1) = \frac{t-5}{2}$

$f(t-1) + \varphi(2t+1) = 2t$

Вычитая из первого уравнения второе, имеем $\varphi(2t+1) = \frac{t-5}{2} - 2t = \frac{-3t-5}{2}$. Следовательно $f(t-1) = 2t + \frac{3t+5}{2} = \frac{7t+5}{2}$. Поэтому, если

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

$2t+1=x$, то $t=\frac{x-1}{2}$ и тогда $\varphi(x)=\frac{-3x+3-10}{4}=$
$=\frac{3x+7}{4}$. Аналогично, обозначая $t-1=x$, имеем
$f(x)=\frac{7x+12}{2}$

Ответ: $f(x)=\frac{7x+12}{2}$, $\varphi(x)=-\frac{3x+7}{4}$.

№3

Обозначим $a=2x+3y-2z-3$, $b=4x-y-4z+7$,
$c=6z-2y-6x-1$. По ОДЗ $a,b,c>0$ и a,b,c целые числа. Так как $a+b+c=3$, то $a=b=c=1$.
Следовательно $6z^2-47z+77<0$. Решая это неравенство, находим, что $\frac{7}{3}<z<5{,}5$. Так как z - целое число, то $z=\{3,4,5\}$. При $z=3$ находим, что $\begin{cases}2x+3y=10\\4x-y=6\end{cases}\Rightarrow x=2, y=2$

Значит $(2,2,3)$ есть решение.
При $z=4$ получим $\begin{cases}2x+3y=12\\4x-y=10\end{cases}\Rightarrow x=3, y=2$
При $z=5$ получим $\begin{cases}2x+3y=14\\4x-y=14\end{cases}\Rightarrow y=2, x=4$,
значит $(4,2,5)$ - решение

+

Ответ: $(2;2,3),(4,2,5),(3,2,4)$.

№4

Неравенство равносильно неравенству:
$$\frac{(x^2-2x-3)((3+2x)^2-(x-2)^2)}{(x^2-1)^2-3^2}>0 \Leftrightarrow$$

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

$$\Leftrightarrow \frac{(x-3)(x+1)(x+5)(3x+1)}{(x^2-4)(x^2+2)} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-3)(x+1)(x+5)(x+\frac{1}{3})}{(x-1)(x+2)} > 0$$

Решая это неравенство методом интервалов, находим ответ: $x<-5$; $-2<x<-1$; $-\frac{1}{3}<x<2$; $x>3$.

№7.

$$1111122222 = \frac{10^{10}-1}{9} + \frac{10^5-1}{9} = \frac{(10^5-1)(10^5+1)}{9} + \frac{10^5-1}{9} =$$

$$= \frac{10^5-1}{9}\cdot(10^5+2) = \frac{10^5-1}{3}\cdot\frac{10^5+2}{3}.$$ Поэтому получим: $x^2-x = \frac{10^5+2}{3}\cdot\frac{10^5-1}{3}$. Покажем, что корни этого уравнения будут числа $\frac{10^5+2}{3}$ и $\frac{1-10^5}{3}$.

Для этого подставим эти числа в исходное уравнение:

$$\left(\frac{10^5+2}{3}\right)^2 - \frac{10^5+2}{3} = \left(\frac{10^5+2}{3}\right)\left(\frac{10^5+2}{3}-1\right) =$$

$$= \left(\frac{10^5+2}{3}\right)\left(\frac{10^5-1}{3}\right),$$ т.е. равно первой части.

Аналогично, подставляя число $\frac{1-10^5}{3}$ в исходное уравнение, получим:

$$\left(\frac{1-10^5}{3}\right)^2 - \frac{1-10^5}{3} = \left(\frac{1-10^5}{3}\right)\left(\frac{1-10^5}{3}-1\right) =$$

ОДЗ:
$|3-x|-|x+1| \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$

На ОДЗ знак $a^{f(x)}-a^{g(x)}$ совпадает со знаком $(a-1)(f(x)-g(x))$, а знак $|f(x)|-|g(x)|$ со знаком $(f(x)-g(x))(f(x)+g(x))$. Поэтому исходное нер-во на ОДЗ равносильно:

$$\frac{(2-1)(x-2)(x^2-2x-3)(x^2-2x+3)}{(3-x-x-1)(3-x+x+1)} \geq 0,$$ т.к. $x^2-2x+3>0$, то

$$\frac{(x-2)(x-3)(x+1)}{(2-2x)\cdot 4} \geq 0$$

$-$ $+$ $-$ $+$ $-$; -1, 1, 2, 3, x

$x \in [-1;1) \cup [2;3]$

Ответ: $[-1;1) \cup [2;3]$

№3.
$x, y, z \in \mathbb{Z}$

$\log_5(2x+y-3z-3)+\log_5(x-2y-4z-1)+\log_5(y+7z-3x+7) >$
$> z^2-9z+18$

Пусть $A=2x+y-3z-3$ $A>0$
$B=x-2y-4z-1$ $B>0$ $A, B, C \in \mathbb{Z}$
$C=y+7z-3x+7$ $C>0$

$A+B+C=3 \Rightarrow A=B=C=1 \Rightarrow \log_5 A=0, \log_5 B=0,$
$\log_5 C=0 \Rightarrow$

$z^2-9z+18<0$
$(z-3)(z-6)<0$

$+$ $-$ $+$; 3, 6, z

$z \in (3;6)$

$= \left(\frac{1-10^5}{3}\right)\left(-\frac{10^5-2}{3}\right) = \left(\frac{10^5+2}{3}\right)\left(\frac{10^5-1}{3}\right)$, ч.т.д.

Ответ: $\frac{10^5+2}{3}$, $\frac{1-10^5}{3}$.

№8

Уравнение имеет корни при неотрицательном дискриминанте: $\frac{D}{4} = -a^2-4a-3 \geq 0 \Leftrightarrow -3 \leq a \leq -1$. По теореме Виета $S = x_1^2+x_2^2 = (x_1+x_2)^2-2x_1x_2 = 4a^2-2(2a^2+4a+3) = -8a-6$. При $-3 \leq a \leq -1$ получаем, что $2 \leq -8a-6 \leq 18$, следовательно наибольшее значение суммы равно 18 и оно достигается при $a=-3$.

Ответ: $a=-3$, $S=18$

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№ 3 Вариант № 4

$\log_5(2x+y-3z-3)+\log_5(x-2y-4z-1)+$
$+\log_5(y+7z-3x+7) > z^2-9z+18$

Сумма подлогарифмических выражений равна

$2x+\cancel{y}-\cancel{3z}-3+x-\cancel{2y}-4z-1+\cancel{y}+\cancel{7z}-\cancel{3x}+7=$
$=-3-1+7=3$

Значит значение каждого подлогарифмического выражения равно 1

$\log_5 1+\log_5 1+\log_5 1 > z^2-9z+18$

$z^2-9z+18<0$

~~$D=81-72=9$~~

~~$z_1=$~~

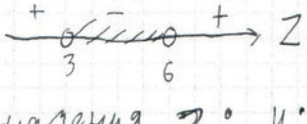
$z^2-9z+18=0$

$D=81-72=9$

$z_1=\frac{9+3}{2}=6$

$z_2=\frac{9-3}{2}=3$

$(z-6)(z-3)<0$



Значения z: 4; 5

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
−	+	+	+	+	+	+	∓	6

Также имеем

$$\begin{cases} 2x+y-3z-3=1 \\ y+7z-3x+7=1 \end{cases}$$

Если $z=5$

$$-\begin{cases} 2x+y-18=1 \\ y-3x+42=1 \end{cases}$$

$-3x-2x+42+18=0$

$-5x=-60$

$x=12$

$y=19-2x$

$y=19-24=-5$

Если $z=4$

$$-\begin{cases} 2x+y-15=1 \\ y-3x+35=1 \end{cases}$$

$-3x-2x+35+15=0$

$5x=50$

$x=10$

$y=16-2x$

$y=16-20=-4$

Ответ: $(12;-5;5)$; $(10;-4;4)$

№7 $x^2+x=111111222222$

Заметим, что: $3^2+3=9+3=12$

$33^2+33=1089+33=1122$

$333^2+333=110889+333=111222$

Видим закономерность, значит

$111111222222=333333^2+333333$

$x=333333$; По Виете: $x_2=-1-333333=-333334$

Ответ: 333333; -333334

8. $\begin{cases} (|x|+1)a = y + \cos x \\ 2^{|\sin x|} + |y| = 2 \end{cases}$

Найти все значения a, при которых система имеет единственное решение

1) Замечу, что $|x| = |-x|$; $\cos x = \cos(-x)$;
$|\sin x| = |\sin(-x)|$, значит x имеет одно значение только если $|x|=0$; $x=0$

2) $\begin{cases} a = y+1 \\ 1+|y| = 2 \end{cases} \to \begin{cases} y = a-1 \\ |y| = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} y = a-1 \\ \left[\begin{array}{l} y = 1 \\ y = -1 \end{array}\right. \end{cases}$

Значит a имеет значения 0 и 2

Ответ: 0 ; 2

4. $\dfrac{(2^x-4)(|x^2-2x|-3)}{|3-x|-|x+1|} \geqslant 0$

$\dfrac{(x-2)(|x^2-2x|-3)}{|3-x|-|x+1|} \geqslant 0$

Найдем нули подмодульных выражений:

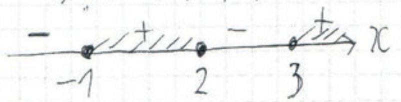
1) $x^2-2x=0$ 2) $3-x=0$ 3) $x+1=0$
$x=0$ $x=3$ $x=-1$
$x=2$

Построим таблицу знаков подмод. выражений

x		-1		0		2		3	
x^2-2x	+	+	+	0	−	0	+	+	+
$3-x$	+	+	+	+	+	+	+	0	−
$x+1$	−	0	+	+	+	+	+	+	+

1) Если $x < -1$

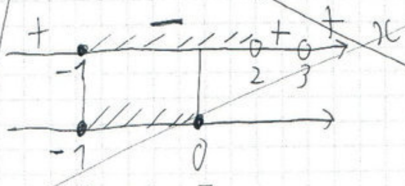
$$\frac{(x-2)(x^2-2x-3)}{3-x+x+1} \geq 0 \;;\quad (x-2)(x-3)(x+1) \geq 0$$



Нет решений

~~Если $-1 \leq x \leq 0$~~

$$\frac{(x-2)(x^2-2x-3)}{3-x-x-1} \geq 0 \;;\quad \frac{(x-2)(x-3)(x+1)}{x-3} \leq 0$$

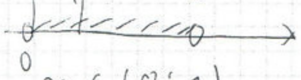


~~$x \in [-1; 0]$~~

2) Если $0 < x < 2$

$\dfrac{(x-2)(-x^2+2x-3)}{3-x-x-1} \geq 0$; $\dfrac{(x-2)(x^2-2x+3)}{2(x-1)} \geq 0$

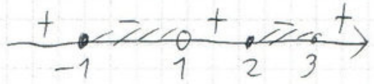
$\dfrac{x-2}{x-1} \geq 0$

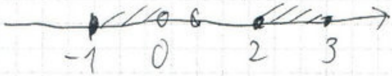


$x \in (0;1)$

3) Если ~~$-1 \leq x \leq 0$~~ $x \in [-1;0] \cup [2;3]$

$\dfrac{(x-2)(x^2-2x-3)}{3-x-x-1} \geq 0$; $\dfrac{(x-2)(x+1)(x-3)}{2(x-1)} \leq 0$



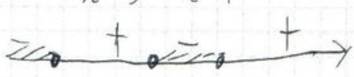


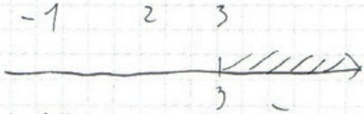
$x \in [-1;0] \cup [2;3]$

4) Если $x \in (+3;+\infty)$

$\dfrac{(x-2)(x^2-2x-3)}{x-3-x-1} \geq 0$ $\qquad (x-2)(x^2-2x-3) \leq 0$

$(x-2)(x+1)(x-3) \leq 0$





нет решений

Итого имеем:

$x \in [-1; 1) \cup [2; 3]$

Ответ: $[-1; 1) \cup [2; 3]$

2. $f(x) + 5x\, f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x^3$

Подставим вместо x $\frac{1}{x}$

$f\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{5}{x} f(x) = \frac{3}{x^3} \quad | \cdot 5x$

$5x\, f\left(\frac{1}{x}\right) + 25 f(x) = \frac{15}{x^2}$

Из равенства изначального $5x\, f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x^3 - f(x)$

$3x^3 - f(x) + 25 f(x) = \frac{15}{x^2}$

$24 f(x) = \frac{15}{x^2} - 3x^3 = \frac{15 - 3x^5}{x^2}$

$f(x) = \frac{3(5 - x^5)}{3 \cdot 8\, x^2} = \frac{5 - x^5}{8x^2}$

Ответ: $\frac{5 - x^5}{8x^2}$

1/6

Дан: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб со стороной a

Найти: r шаров в вершинах куба.

Решение:

1) Если шары касаются ~~тех~~ трех граней куба имеющих общую вершину, то ~~он~~ и центры лежат на диагонали куба.

2) Так как шары касаются друг друга, то расстояние между ними $2r = O_1O_2$

3) Введем $\angle\alpha = \angle C_1AC$

4) Проведем из O_1 (центр шара) O_1L параллельно AC

5) $\angle\alpha = \angle C_1AC = \angle C_1O_1L$

6) через O_2 проведем высоту куба NM

7) $\sin\alpha = \frac{C_1C}{AC_1} = \frac{O_2H}{O_1O_2} \Rightarrow O_2H = O_1O_2\frac{C_1C}{AC_1}$

$O_2H = 2r\,\frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{2r}{\sqrt{3}}$

8) $O_2N = r$; $HM = O_1F = r$

$a = NM = r + \frac{2r}{\sqrt{3}} + r$

$r = \frac{a}{\frac{2}{\sqrt{3}}+2} = \frac{a}{2(\frac{1}{\sqrt{3}}+1)} = \frac{a}{2(\frac{\sqrt{3}+3}{3})} = \frac{3a}{2\sqrt{3}+6}$

Ответ: $\frac{3a}{2\sqrt{3}+6}$

№5 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ $\left(1+\frac{1}{\sin\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{\cos\alpha}\right) > 5$

$\left(1+\frac{1}{\sin\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{\cos\alpha}\right) > 5$

$1+\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha} > 5$

$1+\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{2}{2\sin\alpha\cos\alpha} > 5$

$1+\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{2}{\sin 2\alpha} > 5$ нужно доказать

① в первой четверти! $(0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$

1) $\sin\alpha < 1$ 2) $\cos\alpha < 1$

$\frac{1}{\sin\alpha} > 1$ $\frac{1}{\cos\alpha} > 1$

$0 < 2\alpha < \pi$

$\sin 2\alpha < 1$

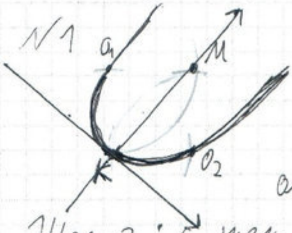
$\frac{1}{\sin 2\alpha} > 1$; $\frac{2}{\sin 2\alpha} > 2$

Значит: $\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{2}{\sin 2\alpha} > 4$ $\quad | +1$

Откуда: $1+\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{2}{\sin 2\alpha} > 5$

Что и требовалось доказать.

№1



Дана случайная парабола $y=x^2$

Шаг №1: Из вершины параболы с помощью циркуля отмечаем две равно удаленные точки

?

Шаг 2: С тем же радиусом описываем окружности вокруг этих точек.

Шаг 3: через точку M (точка пересечения окружностей) проводим к вершине K прямую KM.

Шаг 4: через точку K проводим прямую перпендикулярно KM

Полученные прямые будут являтся осями координатной плоскости

Т.к. $z \in \mathbb{Z}$, то $z=4$ или $z=5$. Тогда

$$\begin{cases} z=4 \\ 2x+y-3\cdot4-3=1 \\ x-2y-4\cdot4-1=1 \\ y+7\cdot4-3x+7=1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} z=5 \\ \cancel{2x+y=19}\ 2x+y-3\cdot5-3=1 \\ \cancel{x-2y=22}\ x-2y-4\cdot5-1=1 \\ y+7\cdot5-3x+7=1 \end{cases}$$

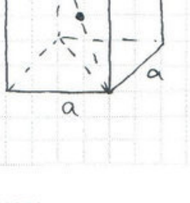
$$\begin{cases} z=4 \\ 2x+y=16 \\ x-2y=18 \\ y-3x=-34 \end{cases} \qquad \begin{cases} z=5 \\ 2x+y=19 \\ x-2y=22 \\ y-3x=-41 \end{cases}$$

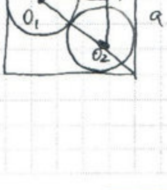
$$\begin{cases} z=4 \\ x=10 \\ y=-4 \end{cases} \qquad \begin{cases} z=5 \\ x=12 \\ y=-5 \end{cases}$$

Ответ: $(10; -4; 4)$; $(12; -5; 5)$

№6.

Т.к. оба шара радиуса r вписаны в противоположные углы, то их центры лежат на диагонали куба. Точка их касания (шаров) также лежит на диагонали



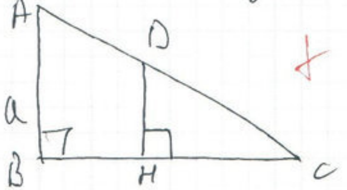


Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

6 баллов

Вариант №2.

№1) Строим прямоугольный треугольник ABC с катетами $AB=a$, $BC=2a$, где a – произвольный отрезок. Тогда гипотенуза этого треугольника по теореме Пифагора равна: $AC=a\sqrt{5}$. На гипотенузе AC отложим отрезок CD равный $\sqrt{5}$, а из точки D опустим перпендикуляр DH. Из подобия треугольников DHC и ABC, получаем, что $\frac{CH}{BC}=\frac{DC}{AC}$. Отсюда $CH=2$.



+

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
+	+	+	+	+	0	0	+	6б.

№2) Положим, что $t=2x+3$, $x=\frac{t-5}{2}$, получим:

$$\begin{cases} f(t-1)+2\varphi(2t+1)=\frac{t-5}{2} \\ f(x-1)+\varphi(2x+1)=2x \end{cases}$$

Заменяя переменную во втором уравнении x на t, имеем систему:

$$\begin{cases} f(t-1)+2\varphi(2t+1)=\frac{t-5}{2} \\ f(t-1)+\varphi(2t+1)=2t \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, имеем

$\varphi(2t+1)=\frac{t-5}{2}-2t=\frac{-3t-5}{2}$.

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

Следовательно $f(t+1) = 2t + \frac{3t+5}{2} = \frac{7t+5}{2}$. Поэтому если $2t+1 = x$, то $t = \frac{x-1}{2}$ и тогда $\varphi(x) = \frac{-3x+3-10}{4} = -\frac{3x+7}{4}$. Аналогично, обозначая $t-1 = \frac{7x+12}{2}$, $\varphi(x) = \frac{7x+12}{2}$

Ответ: $f(x) = \frac{7x+12}{2}$, $\varphi(x) = -\frac{3x+7}{4}$

+

№3) Обозначим $a = 2x+3y-2z-3$, $b = 4x-y-4z+7$, $c = 6z-2y-6x-1$. По ОДЗ $a, b, c > 0$ и a, b, c целые числа. Так как $a+b+c = 3$, то верно что $a = b = c = 1$. Следовательно $6z^2 - 47z + 77 < 0$. Решая это неравенство, находим, что $\frac{7}{3} < z < 5{,}5$. Так как z – целое число, то $z = \{3, 4, 5\}$. При $z = 3$ находим, что $\begin{cases} 2x+3y=10 \\ 4x-y=6 \end{cases} \Rightarrow x=2;\ y=2$. Значит $(2,2,3)$ есть решение

При $z=4$ получим $\begin{cases} 2x+3y=12 \\ 4x-y=10 \end{cases} \Rightarrow x=3,\ y=2$

При $z=5$ получим $\begin{cases} 2x+3y=14 \\ 4x-y=14 \end{cases} \Rightarrow y=2,\ x=4$, значит $(4,2,5)$ – решение.

+

Ответ: $(2,2,3)$, $(4,2,5)$, $(3,2,4)$.

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№4) Неравенство равносильно неравенству:

$$\frac{(x^2-2x-3)\left((3+2x)^2-(x-2)^2\right)}{(x^2-1)^2-3^2} > 0$$

$$\Longleftrightarrow \frac{(x-3)(x+1)(x+5)(x+\frac{1}{3})}{(x-1)(x+2)} > 0$$

$$\Longleftrightarrow \frac{(x-3)(x+1)(x+5)(x+\frac{1}{3})}{(x-1)(x+2)} > 0$$

Решая это неравенство методом интервалов, находим ответ: $x<-5$; $-2<x<-1$; $-\frac{1}{3}<x<2$; $x>3$

№5) Имеем:

$$\frac{\cos x}{\sin^2 x(\cos x-\sin x)}-8 = \frac{\cos x - 8\sin^2 x\cos x + 8\sin^3 x}{\sin^2 x(\cos x-\sin x)} =$$

$$= \frac{1}{\sin^2 x(\cos x-\sin x)}\left(\frac{\cos x(1-8\sin^2 x)}{\sin^3 x}+8\right)\sin^3 x$$

$$= \frac{\sin x}{\cos x-\sin x}\left(\frac{1}{\sin^3 x}\cos x(1-8\sin^2 x)+8\right)$$

При $0<x<\frac{\pi}{4}$, $\sin x>0$, $\cos x-\sin x>0$, поэтому все три выражения $\cos x$, $\frac{1}{\sin^3 x}$, $1-8\sin^2 x$ убывают, поэтому наименьшее значение $\frac{\cos x}{\sin^3 x}(1-8\sin^2 x)$

...получится при $x = \frac{\pi}{4}$, оно равно -6, следовательно, $\frac{\cos x}{\sin^2 x(\cos x - \sin x)} \geq 8$, что и требовалось доказать.

№8) Уравнение имеет корни при неотрицательном дискриминанте: $\frac{D}{4} = -a^2 - 4a - 3 \geq 0 \Leftrightarrow -3 \leq a \leq -1$. По теореме Виета $S = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 4a^2 - (2a^2 + 4a + 3) = -8a - 6$. При $-3 \leq a \leq -1$ получаем, что $2 \leq -8a - 6 \leq 18$, следовательно наибольшее значение суммы равно 18 и оно достигается при $a = -3$.

Ответ: $a = -3$, $S = 18$.

Место для скрепки

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№1

В-1

7 $= 7$

2,65 $= \sqrt{7} \approx 2,65$

Ответ: 2,65

№3

$\log_2(2x-2y+3z-3)+\log_2(4z-x-3y)+\log_2(5y-x-7z+6) > y^2-4y$

$2x-2y+3z-3+4z-x-3y+5y-x-7z+6=3 \Rightarrow$ Почему?

$\Rightarrow \begin{cases} 2x-2y+3z-3=1 \\ 4z-x-3y=1 \\ 5y-x-7z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_2(2x-2y+3z-3)=0 \\ \log_2(4z-x-3y)=0 \\ \log_2(5y-x-7z+6)=0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow y^2-4y<0$

$y(y-4)<0$

$+ \quad 0 \quad - \quad 4 \quad +$

$0<y<4$

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
+	+	±	+	∓	0	±	0	5

$y=1$

$\begin{cases} 2x-2+3z-3=1 \\ 4z-x-3=1 \\ 5-x-7z+6=1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x+3z=6 \\ -x+4z=4 \\ -x-7z=-10 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x+3z=6 \\ -2x+8z=8 \end{cases}$

$11z=12$

$z \notin \mathbb{Z}$

Аналогично $(y=3)$

$y=2$

$\begin{cases} 2x-4+3z-3=1 \\ -x-6+4z=1 \\ -x-7z+6+10=1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x+3z=8 \\ -x+4z=7 \\ -x-7z=-15 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x+3z=8 \\ -2x+8z=14 \end{cases}$

$11z=22$

$z=2$

$2x+3\cdot 2=8$

$2x=2$

$x=1$ Ответ: $(1;2;2)$

№4

$$\frac{|x-1|-1}{(1-x^2)(3^x-2y)} \geq 0$$

I. $x-1>0$, $x>1$

$$\frac{x-1-1}{(1-x^2)(3^x-2y)} \geq 0$$

$$\frac{x-2}{(1-x^2)(3^x-2y)} \geq 0$$

$x-2=0$ $\quad 1-x^2\neq 0$ $\quad 3^x-2y\neq 0$

$x=2$ $\quad x\neq \pm 1$ $\quad 3^x\neq 3^3$

$x\neq 3$

$x>1$

$-$ $+$ $-$ $+$ $-$

-1 1 2 3

$x\in[2;3)$

II. $x-1<0$, $x<1$

$$\frac{-x+1-1}{(1-x^2)(3^x-2y)} \geq 0$$

$$\frac{-x}{(1-x^2)(3^x-2y)} \geq 0$$

$+$ $-$ $+$ $-$ $+$

-1 0 1 3

$(-\infty;-1)\cup[0;1)$

III. Объединим решение

$(-\infty;-1)\cup[0;1)\cup[2;3)$

Ответ: $(-\infty;-1)\cup[0;1)\cup[2;3)$

№7

$x^2+x=1111111122222222$

$11111111\cdot10^8+2\cdot11111111=11111111(99999999+1+2)=$

$=11111111\cdot3(33333333+1)=33333333(33333333+1)=x(x+1)$

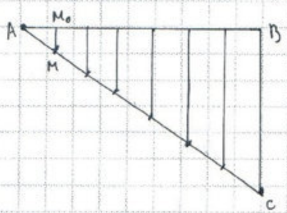
$x=33333333$

$x_1+x_2=-1$

$x_1=3333333 \quad x_2=-3333334$

Ответ: 33333333 ; -33333334

№1

1) 

$|AB|=7$

из точки A проводим произвольную прямую

циркулем отмечаем 7 равных отрезков

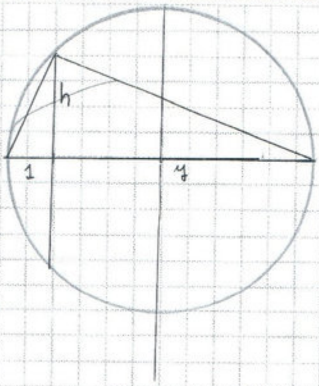
через M проводим прямую $\parallel BC$

по теореме Фалеса отрезок AB разделен на 7 равных частей

$|AM_0|=1$

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

2)



$h^2 = 1 - y$

$h = \sqrt{y}$

Почему?

№2

$$f(x) + x f\left(\frac{x}{2x-1}\right) = 2$$

$$f\left(\frac{x}{2x-1}\right) + \frac{x}{2x-1} f\left(\frac{\frac{x}{2x-1}}{\frac{2x}{2x-1} - 1}\right) = 2$$

$$f\left(\frac{x}{2x-1}\right) + \frac{x}{2x-1} f\left(\frac{x}{2x-2x+1}\right) = 2$$

$$f\left(\frac{x}{2x-1}\right) + \frac{x}{2x-1} f(x) = 2$$

$$x f\left(\frac{x}{2x-1}\right) + \frac{x^2}{2x-1} f(x) = 2x$$

$$2 f(x) + \frac{x^2}{2x-1} f(x) = 2x$$

$$\left(\frac{x^2}{2x-1} - 1\right) f(x) = 2(x-1)$$

$$\frac{x^2-2x+1}{2x-1} f(x) = 2(x-1)$$

$$f(x) = \frac{2(2x-1)}{x-1}$$

№5

$$\sin^2\alpha\cos^6\alpha = \frac{1}{4} 4 \sin\alpha \cos^2\alpha \cos^4\alpha = \frac{1}{4} \sin^2 2\alpha \frac{4\cos^4\alpha}{4} = \frac{1}{16} \cdot$$

$$\cdot \sin^2 2\alpha (1+\cos 2\alpha)^2 = \frac{1}{16}(1-\cos^2 2\alpha)(1+\cos 2\alpha)^2 \quad t = \cos 2\alpha$$

$$f(t) = \frac{1}{16}(1-t^2)(1+t^2) = \frac{1}{16}(1-t)(1+t)^3$$?

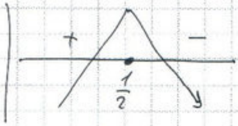
?

$f'(t) = \frac{1}{16}\left(3(1+t)^2(1-t) - (1+t)^3\right) = \frac{1}{16}\left(3(1+t)^2(1-t) - (1+t)^3\right) =$

$= \frac{1}{16}(t+1)^2(3-3t-1-t) = \frac{1}{16}(t+1)^2(2-4t) = -\frac{1}{64}(t+1)^2\left(t-\frac{1}{2}\right)$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16}\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{2}\cdot$

$\cdot\frac{27}{8} = \frac{27}{256}$



$4\cos^4\alpha = (2\cos^2\alpha)^2 = (1+\cos 2\alpha)^2$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \max\{\sin^2\alpha\cos^6\alpha\} = \frac{27}{256} \Rightarrow \sin^2\alpha\cos^6\alpha \le \frac{27}{256}$

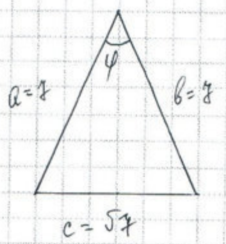
Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
~~+~~	+	+	+	+	0	±	0	5

8

В1 №1

1) I Анализ: предположим, что существует треугольник равнобедренный со сторонами 7, 7, $\sqrt{7}$



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi$$

$$7 = 49 + 49 - 2\cdot 49\cdot\cos\varphi$$

$$7 - 98 = -2\cdot 49\cdot\cos\varphi$$

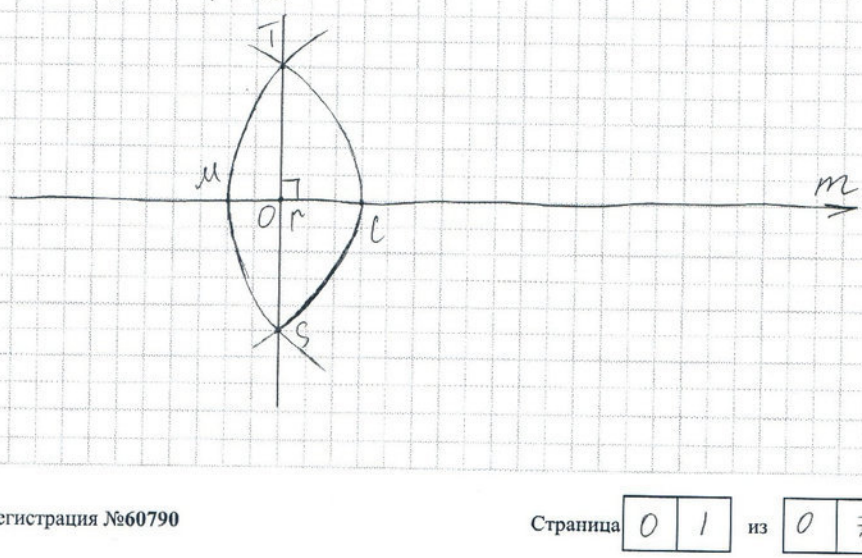
$$-91 = -2\cdot 49\cdot\cos\varphi$$

$$\cos\varphi = \frac{-91}{-2\cdot 49} = \frac{13}{14}$$

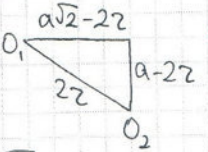
$$\cos\varphi = \frac{13}{14} = \frac{6{,}5}{7}$$

II Построим две пересекающиеся прямые с помощью циркуля и линейки.

Построим прямую m



Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.



? $r < \frac{a}{2}$

По теореме Пифагора

$4r^2=(a\sqrt{2}-2r)^2+(a-2r)^2$

$4r^2=2a^2-4\sqrt{2}\,ar+4r^2+a^2-4ar+4r^2$

$3a^2-4ar(\sqrt{2}+1)+4r^2=0$

$4r^2-4ar(\sqrt{2}+1)+3a^2=0$

$D=(-4a(\sqrt{2}+1))^2-4\cdot4\cdot3a^2=16a^2(2+2\sqrt{2}+1)-48a^2=$

$=48a^2+32\sqrt{2}a^2-48a^2=\cancel{32}\left(\frac{8a}{\sqrt[4]{2}}\right)^2$

$r_{1,2}=\frac{4a(\sqrt{2}+1)\pm\frac{8a}{\sqrt[4]{2}}}{8}$ т.к $r<\frac{a}{2} \Rightarrow$

$r=\frac{4a(\sqrt{2}+1)+\frac{8a}{\sqrt[4]{2}}}{8}=\frac{\sqrt[4]{8}+\sqrt[4]{4}+1}{2}\cdot a$ V?

№7.

$x^2+x-111111222222=0$

По теореме Виета

$\begin{cases} x_1+x_2=-1 \\ x_1\cdot x_2=-111111222222 \end{cases}$

Числа x_1 и x_2 должны отличаться на 1, т.е. быть соседними с разными знаками.

Построим $M \in m$. Проведем окружность $\mathcal{L}$ с центром в т. M и r - произвольный.

$\mathcal{L}(M, r\text{-произв})$.

$\mathcal{L} \cap m = C$. Проведем окружность β с центром в точке C $r = MC$.

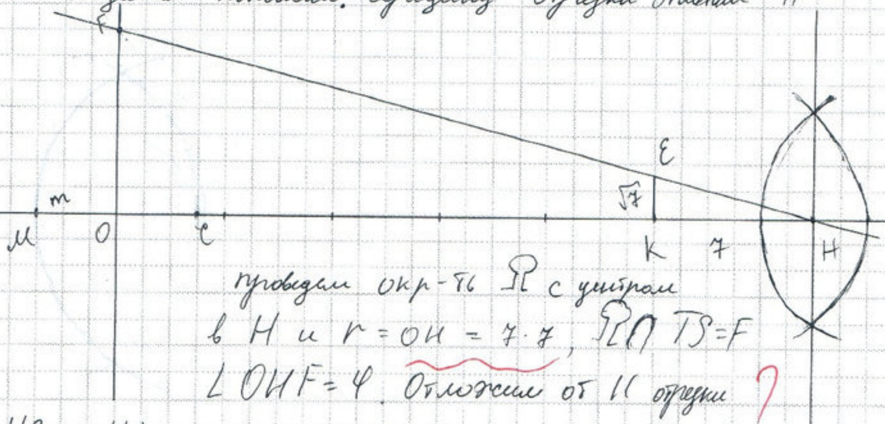
$\beta \cap \mathcal{L} = T$, $\beta \cap \mathcal{L} = S$

проведем прямую TS: $TS \perp m$. $TS \cap m = O$

Нам дан отрезок равный 7.

Отложим от точки O 7 отрезков по 7.

Последний отрезок с помощью циркуля и линейки поделим пополам. Середину отрезка отметим H



проведем окр-ть Ω с центром в H и $r = OH = 7 \cdot 7$, $\Omega \cap TS = F$

$\angle OHF = \varphi$. Отложим от H отрезки

HE и HK так, что $HE = HK = 7$ $EK = \sqrt{7}$

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№2

$$f(x)+xf\left(\frac{x}{2x-1}\right)=2$$

$$f(x)=2-xf\left(\frac{x}{2x-1}\right) \quad (1)$$

Найдем $f\left(\frac{x}{2x-1}\right)$

$$f\left(\frac{x}{2x-1}\right)=2-\left(\frac{x}{2x-1}\right)\cdot f\left(\frac{\frac{x}{2x-1}}{2\cdot\frac{x}{2x-1}-1}\right)$$

$$\boxed{\frac{\frac{x}{2x-1}}{\frac{2x-2x+1}{2x-1}}=\frac{x}{2x-1}:\frac{1}{2x-1}=x}$$

$$f\left(\frac{x}{2x-1}\right)=2-\frac{x}{2x-1}\cdot f(x) \quad (2)$$

Подставим (2) в (1)

$$f(x)=2-x\cdot\left(2-\frac{x}{2x-1}\cdot f(x)\right)$$

$$f(x)=2-2x+\frac{x^2}{2x-1}\cdot f(x)$$

$$f(x)-\frac{x^2}{2x-1}\cdot f(x)=2-2x$$

$$f(x)\cdot\left(1-\frac{x^2}{2x-1}\right)=2-2x$$

$$f(x)\cdot\left(\frac{2x-1-x^2}{2x-1}\right)=2-2x$$

$$f(x)=2(1-x):\left(-\frac{x^2-2x+1}{2x-1}\right)=2(1-x)\cdot\frac{-(2x-1)}{(x-1)^2}=$$

$$=\frac{-2\cdot(1-x)\cdot(2x-1)}{(1-x)^2}=-\frac{2(2x-1)}{1-x}=\frac{2(2x-1)}{x-1}, \quad f(x)=\frac{2(2x-1)}{x-1}$$

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№3 $\log_2(2x-2y+3z-3)+\log_2(4z-x-3y)+\log_2(5y-x-7z+6)>y^2-4y$

$a=2x-2y+3z-3$

$b=4z-x-3y$

$c=5y-x-7z+6$

$a+b+c=0\cdot x+0\cdot y+0\cdot z+3$

$a+b+c=3$

$\log_2 a+\log_2 b+\log_2 c>y^2-4y$

$a>0\Rightarrow a\geq 1$ (т.к. a - целые ч.)

$b>0\Rightarrow b\geq 1$ (т.к. b - целые ч.)

$c>0\Rightarrow c\geq 1$ (т.к. c - целые ч.)

но $a+b+c=3\Rightarrow a=1;\ b=1,\ c=1$

$$(*)\begin{cases}2x-2y+3z-3=1\\4z-x-3y=1\\5y-x-7z+6=1\end{cases}$$

$0>y^2-4y$

$y(y-4)<0$

$+\quad 0\quad -\quad 4\quad +$

$\Rightarrow y\in(0;4)$ и $y\in\mathbb{Z}$

$y=1$

$y=2$

$y=3$

Подставим $y=1$ в $(*)$, получим:

$y=1$

$$\begin{cases}2x+3z-3-2=1\\4z-x-3=1\end{cases}$$

$$\begin{cases}2x+3z=6\\-x+4z=4\end{cases}$$

$$+\begin{cases}-2x+8z=8\\2x+3z=8\end{cases}$$

$11z=14\quad z=\frac{14}{11}\notin\mathbb{Z}$

$z\notin\mathbb{Z}$

$y=2$

$$\begin{cases}2x+3z-4-3=1\\4z-x-6=1\end{cases}$$

$$\begin{cases}2x+3z=8\\-x+4z=7\end{cases}$$

$$\begin{cases}-2x+8z=14\\2x+3z=8\end{cases}$$

$11z=22$

$z=2$

$2x-4+6-3=1$

$2x-1=1$

$2x=2$

$x=1$

Ответ: $(1;2;2)$

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№4 $\frac{|x-1|-1}{(1-x^2)(3^x-27)} \ge 0$

I $x-1>0$, $x>1$

$\frac{x-1-1}{(1-x^2)(3^x-27)} \ge 0$

$\frac{x-2}{(1-x^2)(3^x-27)} \ge 0$

$x-2=0$ $\quad 1-x^2 \neq 0$ $\quad 3^x-27 \neq 0$

$x=2$ $\quad x \neq \pm 1$ $\quad 3^x \neq 3^3$

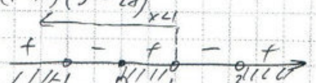
$x \neq 3$

$[2;3)$

II $x-1<0$, $x<1$

$\frac{-x+1-1}{(1-x^2)(3^x-27)} \ge 0$

$\frac{-x}{(1-x^2)(3^x-27)} \ge 0$



$(-\infty;-1)\cup[0;1]$

III Объединим решение

Ответ: $(-\infty;-1)\cup[0;1)\cup[2;3)$

№5 Рассмотрим $\sin^2\alpha\cos^6\alpha$ как функцию $f(t)$

Сначала преобразуем

$$\sin^2\alpha\cos^6\alpha = \frac{1}{4}\cdot\underbrace{4\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}_{\sin^2 2\alpha}\cdot\cos^4\alpha =$$

$$= \frac{1}{4}\sin^2 2\alpha\cdot\cos^4\alpha = \frac{1}{4}\sin^2 2\alpha\cdot\frac{4\cos^4\alpha}{4} =$$

$$= \frac{1}{16}\sin^2 2\alpha\cdot 2(1+\cos 2\alpha)^2 = \frac{1}{16}(1-\cos^2 2\alpha)(1+\cos 2\alpha)^2$$

Замена $\cos 2\alpha = t$, тогда

$$f(t) = \frac{1}{16}(1-t^2)(1+t) = \frac{1}{16}(1-t)(1+t)^3$$

$$f'(t) = \frac{1}{16}\left(3(1+t)^2(1-t) - (1+t)^3\right) =$$

$$= \frac{1}{16}\left(3(1+t^2)(1-t)-(1+t)^3\right) = \frac{1}{16}(t+1)^2(3-3t-1-t)$$

$$= \frac{1}{16}(t+1)^2(2-4t) = -\frac{1}{64}(t+1)^2\left(t-\frac{1}{2}\right)$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16}\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{27}{8} = \frac{27}{256}$$

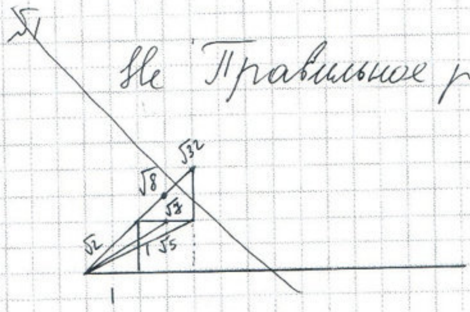
$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \max\{\sin^2\alpha\cos^6\alpha\} = \frac{27}{256} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin^2\alpha\cos^6\alpha \le \frac{27}{256}$$

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№1

Не правильное решение



№7 $x^2+x=11111111\,22222222$

$x^2+x-11111111\,22222222$

$D=b^2-4ac=1+44444444\,88888888=$

$=44444444\,88888889=(66666667)^2$?

$x_1=\frac{66666667-1}{2}=33333333$

$x_2=\frac{(-1-66666667)}{2}=-33333334$

Ответ: $33333333;\ -33333334$

Вариант 2

Место для скрепки

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2018

03 марта 2018г. (очный тур)

Место проведения РУТ (МИИТ) - г. Москва

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№ 4

~~ОДЗ~~

$$\frac{|2^{x^2-2x}-8|\,(|3+2x|-|x-2|)}{|x^2-1|-3}\geq 0$$

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
+	0	0	+	0	+	∓	+	4

1) ОДЗ

$|x^2-1|\neq 3$

$x^2\neq 4 \quad \vee \quad x^2\neq -2 \quad \varnothing$

$x\neq \pm 2$

2) $2^{x^2-2x}-8=0$

$x^2-2x=3$

$x^2-2x-3=0$

$x=-1$

$x=3$

$|3+2x|=|x-2|$

$3+2x=x-2 \quad \vee \quad 2x+3=2-x$

$x=-5$

$3x=-1$

$x=-\frac{1}{3}$

+ − + − + − +

$-5,\ -2,\ -1,\ -\frac{1}{3},\ 2,\ 3$

Ответ. $[-\infty,-5]\cup(-2,-1]\cup[-\frac{1}{3},2)\cup[3,+\infty)$

№ 7

$x^2-x=1111122222$ I способ

$x^2-x-1111122222=0$

$D=1+4\cdot 1111122222=4444488889$

Регистрация №58898

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

$\sqrt{D} = 66667$

$x_{1,2} = \frac{1 \pm 66667}{2} =$

$x_1 = 33334$

$x_2 = -33333$

Ответ: $x = 33334$, $x = -33333$

где вычисления?!

??

№8

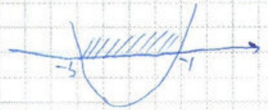
$x^2 + 2ax + 2a^2 + 4a + 3 = 0$

$x_1^2 + x_2^2$ - наиб

$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 4a^2 - 2(2a^2 + 4a + 3) = 4a^2 - 4a^2 - 8a - 6 = -8a - 6$

$\frac{D}{4} = a^2 - 2a^2 - 4a - 3 = -a^2 - 4a - 3 \geq 0$

$a^2 + 4a + 3 \leq 0$

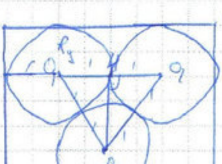


+

ф-я $-8a - 6$ - убыв => наиб знач в т. -3

$x_1^2 + x_2^2 = -8(-3) - 6 = 24 - 6 = 18$

№6

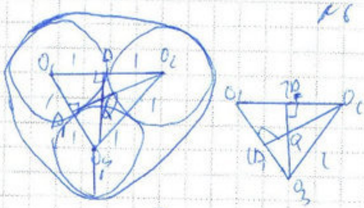


Дано: цилиндр

[illegible]

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№6



Дано: цилиндр
O_1; $R=1$
Найти: V_y.

Решение

1) $V = S_{осн}\cdot h = \pi r_y^2 \cdot h = \pi\left(1+\frac{2}{\sqrt3}\right)^2 \cdot 2 =$

2) $\triangle O_1O_2O_3$ - равностор.

3) O_3D и O_1D_1 - высоты $\Rightarrow$ в равностор. $\triangle$ высоты яв. и мед. и бис.

4) Из п/у $\triangle O_2O_3D$ по т. Пифагора
$O_3D = \sqrt{O_2O_3^2 - O_2D^2} = \sqrt{4-1} = \sqrt3$

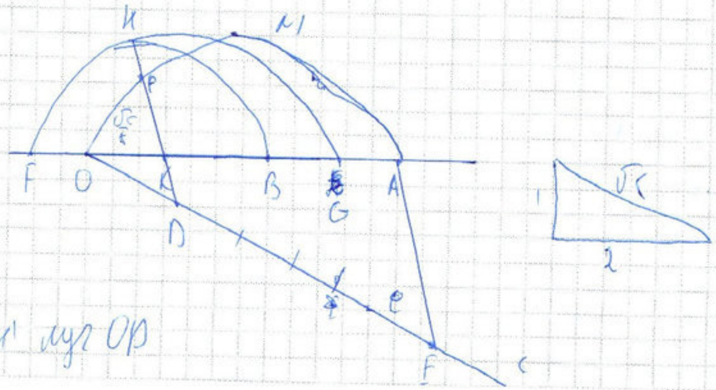
5) $QO_3 = \frac23 O_3D = \frac{2\sqrt3}{3} = \frac{2}{\sqrt3}$

6) $R_y = 1 + \frac{2}{\sqrt3}$

~~7) $V = \pi r$~~ 7) $H = 2$ - высота

Ответ: $V = \left(1+\frac{2}{\sqrt3}\right)^2 \pi \cdot 2$

+



1. луч OD

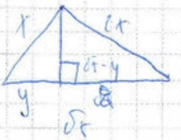
Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

2) отмеч окр $= \sqrt{5}$

3) делим окр. ~~...~~. пополам

4) провод окр $r = OB$

5) пропорционировав



$$\begin{cases} x^2 = y\cdot\sqrt{5} \\ 4x^2 = \sqrt{5}(\sqrt{5}-y) \end{cases}$$

$x = \frac{\sqrt{5}-y}{4}$

$5y = \sqrt{5}$

$y = \frac{\sqrt{5}}{5}$

делим окр OA на 5 равн. частей

~~сед~~ для этого проводим OC, отмеч 5 равн. окр.

соед. AE и // проведем прямую через т. D и получ т. K

$OK = \frac{\sqrt{5}}{5}$

6) через точку K строим прямую $\perp$ OA провод. окр с центром в т. K (любым радиусом) F, через т. F и G пров. окр $r > FK$, получ т. H

соед. HK ($HK \perp OA$) при пересеч. с самой окружн. имеем т. R

$AP = 2$

№ 2

II способ $x^2 - x = 1111122222$

т.к. $x_1 + x_2 = 1$ то $|x_1|$ и $|x_2|$ соед. числа

Место для скрепки

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

$$\left.\begin{matrix} 111\,111\,222\,222 \vdots 3 \quad 4 \\ 111\,111\,222\,222 \vdots 111\,111 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$111\,111\,222\,222 = 333\,333 \cdot 333\,334$

Т.е. $x_1 = 333333$, $x_2 = -333\,334$

Ответ: $-333\,334$; 333333

№7

II способ

$\sqrt{1111122222} \approx 33333{,}5 \Rightarrow x_1 = 33334$

$x_2 = -33333$

Проверка

$$
\begin{array}{r}
\times\, 33334 \\
33333 \\
\hline
100002 \\
100002 \\
100002 \\
100002 \\
100002 \\
\hline
1111122222
\end{array}
$$

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
0	+	0	+	0	∓	±		4

Вариант 4

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2018

03 марта 2018г. (очный тур)

Место проведения РУТ (МИИТ) - г. Москва

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№1

$x^2+x=111111222222$

$x^2+x-111111222222=0$

$D=1+444444888888=444444888889$

$\sqrt{D}=666667$

$x_1=\frac{1+666667}{2}=333334$

$x_2=\frac{1-666667}{2}=-333333$

д. быть -1!

отсюда ошибочный ответ

Ответ: -333333; 333334

№2

$f(x)+5x\,f\left(\frac{1}{x}\right)=3x^3$

$x=t$ $\quad\frac{1}{x}=t$

$$\begin{cases} f(t)+5t\,f\left(\frac{1}{t}\right)=3t^3 \\ f\left(\frac{1}{t}\right)+\frac{5}{t}f(t)=\frac{3}{t^3} \quad (\cdot 5t) \end{cases}$$

$f(t)-25f(t)=3t^3-\frac{15}{t^2}$

$-24f(t)=3t^3-\frac{15}{t^2} \quad (:-24)$

$f(t)=\frac{-t^3}{8}+\frac{5}{8t^2}$

Ответ: $f(x)=-\frac{x^3}{8}+\frac{5}{8x^2}$

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№ 4

$$\frac{(2^x-4)(|x^2-2x|-3)}{|3-x|-|x+1|} \geq 0$$

1. ОДЗ $\quad |3-x| \neq |x+1|$

$3-x \neq x+1 \quad \vee \quad 3-x \neq -x-1$

$2x \neq 2 \qquad \varnothing$

$x \neq 1 \qquad$ нет решений

2. $2^x = 4 \qquad |x^2-2x| = 3$

$x = 2 \qquad x^2-2x = +3 \quad \vee \quad x^2-2x = -3$

$x^2-2x-3=0 \qquad D<0$

$x^2-2x-3=0 \qquad$ решений нет

$D = 16$

$\sqrt{D} = 4$

$x_{1,2} = \frac{2 \pm 4}{2} = -1; 3$

$x = -1 \qquad x = 3$

3.

Ответ: $[-1; 1) \cup [2; 3]$

№8

$$\begin{cases} (|x|+1)a = y + \cos x \\ 2^{|\sin x|} + |y| = 2 \end{cases}$$

т.к уравнение имеет 1 реш. => $x=0$

(т.к относительно x система чётная) ✓

$$\begin{cases} a = y+1 \\ 2^0 + |y| = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} y = a-1 \\ |y| = 1 \end{cases} \Rightarrow y = \pm 1$$

$a = 2$

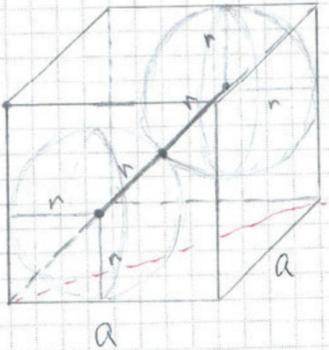
$a = 0$

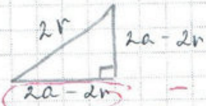
Ответ: $a=0$; $a=2$

при $a=0$ есть также второе решение $y=0$, $x=\frac{\pi}{2}$

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№ 6





— горизонтальный катет отсчитывался иначе — будет диагональ основания

$$4r^2 = (2a-2r)^2 + (2a-2r)^2$$

$$4r^2 = 2(4a^2 - 8ar + 4r^2)$$

$$4r^2 = 8a^2 - 32ar + 8r^2$$

$$4r^2 - 32ar + 8a^2 = 0$$

$$r^2 - 8ar + 2a^2 = 0$$

$$D/4 = 16a^2 - 2a^2 = 14a^2$$

$$r = 4a \pm a\sqrt{14}$$

т.к. $r < a$ $\quad r = 4a - a\sqrt{14}$

Ответ: $r = 4a - a\sqrt{14}$

Место для скрепки

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2018 03 марта 2018г. (очный тур)

Место проведения МБУ ДО г.Сочи ЦТРиГО - г.Сочи

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

В-4

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
0	–	±	∓	+	0	+	0	3

№2 $f(x)+5x\,f\left(\frac{1}{x}\right)=3x^3$

$f\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{5}{x}f(x)=\frac{3}{x^3}\ \Big|\cdot 5x$

$5x\,f\left(\frac{1}{x}\right)+25f(x)=\frac{15}{x^2}$

$3x^3-f(x)+25f(x)=\frac{15}{x^2}$

№3 $\log_5(2x+y-3z-3)+\log_5(x-2y-4z-1)+\log_5(y+7z-3x+7)>z^2-9z+18$

$(2x+y-3z-3)+(x-2y-4z-1)+(y+7z-3x+7)=3 \Rightarrow$

$$\begin{cases} 2x+y-3z-3=1; \\ x-2y-4z-1=1; \\ y+7z-3x+7=1 \end{cases} \Rightarrow \log_5(2x+y-3z-3)=0;$$

$\log_5(x-2y-4z-1)=0$; $\log_5(y+7z-3x+7)=0 \Rightarrow$

Надо решить

$z^2-9z+18<0$

$(z-6)(z-3)<0$

$+\quad 3 \quad - \quad 6 \quad +$

$z\in 4;5$

$$\begin{cases} z=4 \\ 2x+y-3\cdot 4-3=1 \\ x-2y-4\cdot 4-1=1 \end{cases} \quad \begin{cases} z=4 \\ 2x+y=16 \\ x-2y-16-1=1 \end{cases} \quad \begin{cases} z=4 \\ y=16-2x \\ x-2(16-2x)-16-1=1 \end{cases}$$

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

$$\begin{cases} z = 4 \\ y = 16 - 2x \\ x - 32 + 4x - 16 - 1 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} z = 4 \\ y = 16 - 2x \\ 5x = 50 \end{cases} \quad \begin{cases} z = 4 \\ y = 16 - 2x \\ x = 10 \end{cases} \quad \begin{cases} z = 4 \\ y = -4 \\ x = 10 \end{cases};$$

$$\begin{cases} z = 5 \\ 2x + y - 3\cdot 5 - 3 = 1 \\ x - 2y - 4\cdot 5 - 1 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} z = 5 \\ 2x + y = 19 \\ x - 2y - 20 - 1 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} z = 5 \\ y = 19 - 2x \\ x - 2(19 - 2x) - 21 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = 5 \\ y = 19 - 2x \\ x - 38 + 4x - 21 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} z = 5 \\ y = 19 - 2x \\ 5x = 60 \end{cases} \quad \begin{cases} z = 5 \\ y = 19 - 2x \\ x = 12 \end{cases} \quad \begin{cases} z = 5 \\ y = -5 \\ x = 12 \end{cases}$$

$(10; -4; 4)$ и $(12; -5; 5)$

Ответ: $(10; -4; 4)$; $(12; -5; 5)$

№7 $x^2 + x = 111111222222$

$111111222222 = 111111000000 + 2\cdot 111111 = 111111(1000000 + 2) =$

$= 111111(999999 + 1 + 2) = 3\cdot 111111(333333 + 1) = 333333(333333 + 1)$

$x(x+1) = 333333(333333 + 1)$

$x = 333333$

По т. Виета $x_1 + x_2 = -1$, то $x_1 = 333333 \Rightarrow x_2 = -333334$

Ответ: $x_1 = 333333$

$x_2 = -333334$

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№4 $\frac{(2^x-2^2)(|x^2-2x|-3)}{|x-3|-|x+1|} \geqslant 0$

$2^x-2^2=0$

$x=2$

$|x^2-2x|=3$

$x^2-2x=3$

$x^2-2x=-3$

$\left[\begin{array}{l} x^2-2x-3=0 \\ x^2-2x+3=0 \;\varnothing \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} (2^x-2^2)(|x^2-2x|-3)>0 \\ |x-3|-|x+1|>0 \end{cases} \\ \begin{cases} (2^x-2^2)(|x^2-2x|-3)<0 \\ |x-3|-|x+1|<0 \end{cases} \end{array}\right.$

$(2^x-2^2)(|x^2-2x|-3)<0$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2^x-2^2>0 \\ (x^2-2x)-3<0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2^x-2^2<0 \\ |x^2-2x|-3>0 \end{cases} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>2 \\ |x^2-2x|-3<0 \end{cases} \\ \begin{cases} x<2 \\ |x^2-2x|>3 \end{cases} \end{array}\right.$

$\begin{cases} x>2 \\ x\in(-1;3) \end{cases}$

$x^2-2x+3=(x-1)^2+2>0$

$+ \quad -1 \quad - \quad 3 \quad +$

$|x^2-2x|<3$

$-3<x^2-2x<3$

$\begin{cases} x^2-2x-3<0 \\ x^2-2x+3>0 \end{cases}$ $\begin{cases} (x-3)(x+1)<0 \\ x\in(-\infty;+\infty) \end{cases}$ $\begin{cases} x\in(-1;3) \\ x\in(-\infty;+\infty) \end{cases}$ $x\in(-1;3)$

$|x^2-2x|>3$

$\left[\begin{array}{l} x^2-2x>3 \\ x^2-2x<-3 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x^2-2x-3>0 \\ x^2-2x+3<0 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} (x-3)(x+1)>0 \\ \varnothing \end{array}\right.$

$+ \quad -1 \quad - \quad 3 \quad +$

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

$(2^x-2^2)(|x^2-2x|-3>0$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2^x-2^2>0\\ |x^2-2x|-3>0\end{cases}\\ \begin{cases}2^x-2^2<0\\ |x^2-2x|-3<0\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>2\\ |x^2-2x|>3\end{cases}\\ \begin{cases}x<2\\ |x^2-2x|<3\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>2\\ x\in(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)\end{cases}\\ \begin{cases}x<2\\ x\in(-1;3)\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: $(2;3)$

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№5 $\left(1+\frac{1}{\sin\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{\cos\alpha}\right)>5$

Раскроем скобки

$1+\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}=1+\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\frac{1}{2}\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha}=$

$=1+\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{2}{\sin 2\alpha}$

т.к $0<\alpha$, то $\cos\alpha<1 \Rightarrow \frac{1}{\cos\alpha}>1$

$\frac{1}{\sin}>1$, т.к. $\alpha<\frac{\pi}{2}$ и $\sin\alpha<1$

$\sin 2\alpha\leq 1 \Rightarrow \frac{1}{\sin 2\alpha}\geq 1 \Rightarrow \frac{2}{\sin 2\alpha}\geq 2$

Отсюда вытекает

$\frac{1}{\sin\alpha}>1$; $\frac{1}{\cos\alpha}>1$; $\frac{2}{\sin 2\alpha}\geq 2$ всё сложим

$\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{2}{\sin 2\alpha}>4 \quad |+1$

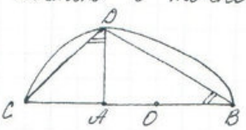
$1+\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{2}{\sin 2\alpha}>5$

Вариант 1.

6 баллов

Задача 1.

Пусть дан отрезок AB длины 7. На продолжении отрезка AB за точку A отложим отрезок $AC = \frac{1}{7}AB$ (деление отрезка на n равных частей относится к числу элементарных построений). На отрезке CB, как на диаметре, построим полуокружность (это также элементарное построение!) и из точки A восставим перпендикуляр AD до пересечения с этой окружностью в точке D.



Тогда $AD = \sqrt{CA \cdot AB} = \sqrt{7}$ т.к. угол D – прямой и в силу подобия (по равенству углов) треугольников CAD и DAB имеем: $\frac{AD}{AC} = \frac{AB}{AD}$, т.е. $AD = \sqrt{7}$

Задача 2.

Данное равенство должно выполняться для любого x, в том числе для $x_a = \frac{x}{2x-1}$. Отсюда находим, что $x = \frac{x_a}{2x_a-1}$.

Поэтому получим $f\left(\frac{x_a}{2x_a-1}\right) + \frac{x_a}{2x_a-1} f(x_a) = 2$.

Переобозначая x_a через переменную x, получим систему равенств:

$$f(x) + xf\left(\frac{x}{2x-1}\right) = 2$$

$$f\left(\frac{x}{2x-1}\right) + \frac{x}{2x-1} f(x) = 2$$

Решая ее, находим, что $f(x) = \frac{4x-2}{x-1}$. Проверка показывает, что эта функция есть решение данного уравнения.

Ответ: $\frac{4x-2}{x-1}$

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
+	+	+	+	+	0	+	0	6

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
+	0	0	±	−	0	±	0	3

№4

$$\frac{|x-1|-1}{(1-x^2)(3^x-27)} \geq 0$$

1) $x-1\geq 0$

$x\geq 1$

$$\frac{x-1-1}{(1-x^2)(3^x-27)}\geq 0$$

$$\frac{(x-2)}{(1-x)(1+x)(3^x-27)}\geq 0$$

2) $x-1<0$ (*)

$x<1$

$$\frac{-x+1-1}{(1-x^2)(3^x-27)}\geq 0$$

$$\frac{-x}{(1-x)(1+x)(3^x-27)}\geq 0$$

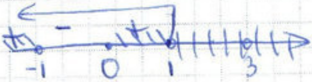
Воспользуемся обобщенным методом интервалов

Нули числит: $x-2=0$, $x=2$

Нули знамен: $x=1$, $x=-1$; $3^x-27=0$; $3^x=27$; $x=3$

Нули числ: $x=0$

Нули зн: $x=1$, $x=-1$, $x=3$



Определим зн $f(x)$ на пром

$$f(x)=\frac{(x-2)}{(1-x)(1+x)(3^x-27)}$$

$$f(10)=\frac{8}{-9\cdot 11\cdot(3^{10}-27)}<0$$

$$f(2,5)=\frac{(2,5-2)}{(1-2,5)(3,5)(3^{2,5}-27)}>0$$

$$f(1,5)=\frac{(1,5-2)}{(1-1,5)(1+1,5)(3^{1,5}-27)}<0$$

~~$x\in[2;3)$ на $x\in 1$~~ !!

Проверим крайние точки

Определим зн $f(x)$ на пром

$$f(-10)=\frac{10}{11\cdot(-9)\cdot(3^{-10}-27)}>0$$

$$f(-0,5)=\frac{0,5}{1,5\cdot 0,5(\sqrt{3}-27)}<0$$

$$f(0,5)=\frac{-0,5}{(0,5)(1,5)(\sqrt{3}-27)}>0$$

Проверим кр. точк.

$f(1)$ ~~∉ (*)~~, т.к. ∉ решению ~~x0~~ на $x<1$

$x\in(-\infty;-1)\cup[0;1)$

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

$f(1) = \frac{(1-2)}{\underset{0}{(1-1)}(2)(\underset{-}{3^1-27})} \neq 0$ в решению

на ~~$x \in [1, +\infty)$~~ $x \geq 1$

$x \in \{1\} \cup [2;3)$

Ответ: на $x \geq 1$ $x \in \{1\} \cup [2;3)$ на $x < 1$ $x \in (-\infty; -1) \cup [0;1)$

N 7

$x^2 + x = 1111111122222222$

$x^2 + x - 1111111122222222 = 0$

$D = 1 + 4444444488888888 = 4444444488888889$

$\sqrt{4444444488888889} = 66666667$

$$\begin{array}{r} \times\ 66666667 \\ 66666667 \\ \hline 466666669 \\ 4000000020 \\ 40000000200 \\ 400000002000 \\ 4000000020000 \\ 40000000200000 \\ 400000002000000 \\ 4000000020000000 \\ \hline 4444444488888889 \end{array}$$

$x_1 = \frac{-1+66666667}{2} = \frac{66666666}{2} = 33333333$

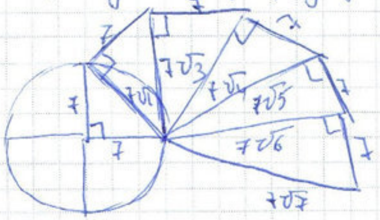
$x_2 = \frac{1+66666667}{2} = \frac{66666668}{2} = 33333334$

Ответ: $x_1 = 33333333$, $x_2 = 33333334$

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№1

Проведем окр. радиуса 7, посстр равноб. прямоуг. треуг, гипотен $7\sqrt{2}$,



(Перпендикуляр проводится с помощью линейки)

проведем к гипотен перп равный 7, по теор Пиф гипотен $7\sqrt{3}$, аналогично проведем перп $7 \Rightarrow$ гипотен $7\sqrt{4}$, пров. перп $7 \Rightarrow$ гипотен $7\sqrt{5}$, провед. перп 7, гипотен равна $7\sqrt{6}$, аналогичн к гип $7\sqrt{6}$ проводим перп $7 \Rightarrow$ по теор Пиф гипотен равна $7\sqrt{7}$

Разделим отрезок $7\sqrt{7}$ на 7 равных частей $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ один из отрезков будет равен $\sqrt{7}$, что и треб найти

№5

$\sin^2 a \cos^6 a \leq \frac{27}{256}$

$|\sin a||\cos^3 a| \leq \frac{3\sqrt{3}}{16} \quad |\cdot 2$

$2|\sin a|\,|\cos a \cdot \cos^2 a| \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$

$|\sin 2a|\,|\cos^2 a| \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$

$|\sin 2a| \cdot \left|\frac{1+\cos 2a}{2}\right| \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$

$|\sin 2a| \cdot \left|\frac{1}{2} + \frac{\cos 2a}{2}\right| \leq \frac{3\sqrt{3}}{8} \quad |\cdot 2$

$|2\sin 2a|\,|1+\cos 2a| \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}$

$|2\sin 2a + \sin 4a| \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}$

$|\sin 4a + 2\sin 2a| - \frac{3\sqrt{3}}{4} \leq 0$

Σ	1	2	3	4	5	6	7	8
3	0	+	0	+	0	0	0	±

Место для скрепки

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

Вариант №4

№2

$f(x)+5x\,f\left(\frac{1}{x}\right)=3x^3$

$x=t$

$x=\frac{1}{t}$

$t=\frac{1}{x}$

$$\begin{cases} f(t)+5t\cdot f\left(\frac{1}{t}\right)=3t^3 \\ f\left(\frac{1}{t}\right)+\frac{5}{t}\cdot f(t)=\frac{3}{t^3} \quad \cdot(5t) \end{cases}$$

$f(t)-25f(t)=3t^3-\frac{15}{t^2}$

$24f(t)=\frac{15}{t^2}-3t^3$

$f(t)=\frac{5}{8t^2}-\frac{1}{8}t^3$

$f(x)=\frac{5}{8x^2}-\frac{x^3}{8}$

Ответ: $f(x)=\frac{5}{8x^2}-\frac{x^3}{8}$

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2018 03 марта 2018г. (очный тур)

Место проведения РУТ (МИИТ) - г. Москва

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№4

$$\frac{(2^x-4)(|x^2-2x|-3)}{|3-x|-|x+1|} \geq 0$$

О.Д.З. $|3-x| \neq |x+1|$

$x-3 \neq x+1$ $\qquad$ $x-3 \neq -x-1$

$\varnothing$ $\qquad$ $x \neq 1$

$2^x-4=0$ $\qquad$ $|x^2-2x|=3$

$2^x=2^2$ $\qquad$ $x^2-2x=3$ $\qquad$ $x^2-2x=-3$

$x=2$ $\qquad$ $x^2-2x-3=0$ $\qquad$ $x^2-2x+3=0$

$x=3$ $\quad$ $x=-1$ $\qquad$ $D<0$

Ответ: $x \in [-1;1) \cup [2;3]$

Регистрация №58288 Страница 02 из 03

Место для скрепки

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№8

$$\begin{cases}(|x|+1)a = y + \cos x \\ 2^{|\sin x|} + |y| = 2\end{cases}$$

Т.к. система имеет единственное решение, то $x=0$

не объяснено, почему

$$\begin{cases}a=y+1 \\ 2^0+|y|=2\end{cases} \quad \begin{cases}a=y+1 \\ |y|=1\end{cases} \quad \begin{aligned}|y|=1 \\ y=\pm 1\end{aligned}$$

$$\begin{cases}y=1 \\ a=2\end{cases} \quad \begin{cases}y=-1 \\ a=0\end{cases}$$

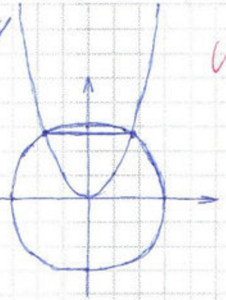
доп. проверка при $a=0$ дает также корни $\begin{matrix} y=0 \\ x=\frac{\pi}{2}\end{matrix}$

$\pm$

Ответ: $a=2$; $a=0$

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№1



1) Из вершины параболы циркулем провести окружность любого радиуса
2) Соединить точки пересечения параболы с окружностью между собой.
3) С помощью линейки построить перпендикуляр к получившейся прямой, проходящий через вершину параболы (получится ось ординат)
4) провести перпендикуляр к получившейся оси Оу через вершину параболы (получится ось абсцисс)

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
−	+	+	0	0	±	0	∓	3

Место для скрепки

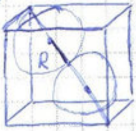
ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2018 03 марта 2018г. (очный тур)

Место проведения МБУ ДО г.Сочи ЦТРиГО - г.Сочи

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№6

a



$a\sqrt{3}$ – диагональ куба

$\sqrt{3}R$ – крайние части диагонали куба

$2R$ – середина диагонали куба, т.е

3

$a\sqrt{3} = 2(\sqrt{3}R + R)$

$a\sqrt{3} = 2R(\sqrt{3}+1)$

$R = \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+2}$

Ответ: $\frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+2}$

№2

$f(x) + 5x + f(\frac{1}{x}) = 3x^5$

$f(\frac{1}{x}) + \frac{5}{x} f(x) = \frac{3}{x^5} \quad | \cdot 5x$

$5x\, f(\frac{1}{x}) + 25 f(x) = \frac{15}{x^2}$

$3x^3 - f(x) + 25 f(x) = \frac{15}{x^2}$

$24 f(x) = \frac{15}{x^2} - 3x^3$

$f(x) = \frac{15 - 3x^9}{24x^2}$

Ответ: $\frac{15 - 3x^5}{24x^2}$

№8 $\begin{cases} (|x|+1)a = y + \cos x \\ 2^{|\sin x|} + |y| = 2 \end{cases}$?

Т.к все x под модулями, то:

$x = |-x|$;

$\cos x = \cos(-x)$

$|\sin x| = |\sin(-x)|$

один x при $x=0$, тогда:

$\begin{cases} a = y+1 \\ 1+|y| = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} y = a-1 \\ |y| = 1 \end{cases}$

$a = 2; 0$ Проверка

1) $\begin{cases} 2(|x|+1) = y + \cos x \\ 2^{|\sin x|} + |y| = 2 \end{cases}$

$\frac{y+\cos x}{(|x|+1)} = 2^{|\sin x|} + |y|$

$\frac{1+1}{1} = 2^0 + 1$

2) $\begin{cases} 0(|x|+1) = y + \cos x \\ 2^{\sin x} + y = 2 \end{cases}$

$\begin{cases} y + \cos x = 0 \\ 2^{|\sin x|} + y = 2 \end{cases}$

$2^{|\sin x|} - \cos x = 0$

$1 - 1 = 0$

Ответ: 2; 0

Задача 3.

Обозначим $2x-2y+3z-3=A$, $4z-x-3y=B$, $5y-x-7z+6=C$. Находим, что $A+B+C=3$. По условию x, y, z - целые числа, поэтому $A\geq1$, $B\geq1$, $C\geq1 \Rightarrow A=1$, $B=1$, $C=1$. А тогда получаем неравенство

$y^2-4y<0 \Leftrightarrow 0<y<4 \Rightarrow y=\{1;2;3\}$.

Решим систему $A=1$, $B=1$. Выразим неизвестные x, z через y. Получим $x=\frac{13-y}{11}$; $z=\frac{8y+6}{11}$. Из этих равенств получим, что x, z будут целыми лишь при $y=2$, $x=1$, $z=2$. Таким образом, ответ: $(1;2;2)$.

Задача 4.

Данное неравенство равносильно неравенству

$$\frac{(x-1)^2-1}{(x-1)(x+2)(x-3)}\leq0 \Leftrightarrow \frac{x(x-2)}{(x-1)(x+1)(x-3)}\leq0$$

Решая его методом интервалов, находим с учетом ОДЗ:

Ответ: $x<-1$; $0\leq x<1$; $2\leq x<3$

Задача 5.

$(1-\cos^2 x)\cos^6 x=(1-y)y^3$, где $y=\cos^2 x$

Найдем $\max f(y)=y^3-y^4$ при $0\leq y\leq1$

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№3

$\log_5(2x+y-3z-3)+\log_5(x-2y-4z-1)+\log_5(y+7z-3x+7)>z^2-9z+18$

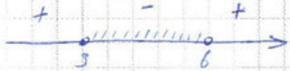
$$\begin{array}{l} +\,2x+y-3z-3 \\ \quad x-2y-4z-1 \\ \quad y+7z-3x+7 \\ \hline \qquad\qquad 3 \end{array}$$

$$\begin{cases} 2x+y-3z-3\geq 1 \\ x-2y-4z-1\geq 1 \\ y+7z-3x+7\geq 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x+y-3z-3=1 \\ x-2y-4z-1=1 \\ y+7z-3x+7=1 \end{cases}$$

$z^2-9z+18<0$

$z=3;6$

$(z-3)(z-6)<0$



$z=4;5$

Пусть $z=4$, тогда $\begin{cases} 2x+y-12-\overset{3}{\cancel{15}}=1 \\ x-2y-16-1=1 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x+y-16=0 \\ x-2y-18=0 \end{cases}$

$\cancel{2x+y=16}$ $\begin{cases} 4x+2y=32 \\ x-2y=18 \end{cases}$ $5x=50$ $x=10$ $y=16-20=-4$

$(10;-4;4)$

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

Пусть $z=5$, тогда

$$\begin{cases} 2x+y-19=0 \\ x-2y-22=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x+2y=38 \\ x-2y=22 \end{cases}$$

$5x=60$ $\qquad$ $y=19-2\cdot 12$

$x=12$ $\qquad$ $y=25$

$(12;\ 5;\ 25)$

Ответ: $(10;\ -4;\ 4)$; $(12;\ 5;\ 25)$

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

5

$4tg5° \cdot tg9° \quad 3tg6° \quad tg10°$

$tg x = \sin x$ при $x \in [1;10]$

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
–	+	±	∓	–	–	±	–	3

$4\sin5° \cdot \sin9° \quad 3\sin6° \cdot \sin10°$

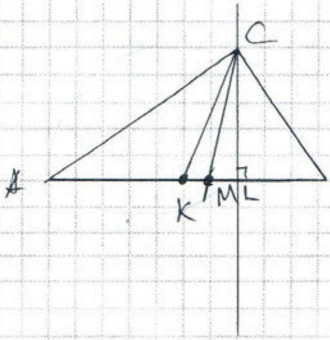
$\sin6° = 2\sin3° \cdot \cos3°$

$\sin10° = 2\sin5 \cdot \cos5°$

$1\ \cancel{4} \cdot \cancel{\sin5°} \cdot \sin9° \quad 3 \cdot 2\sin3° \cdot \cos3° \cdot \cancel{\sin5°} \cdot \cos5°$

$\sin9° \quad 3\sin3° \cdot \cos3° \cdot \cos5°$

1.



CK – медиана

CM – биссектр.

CL – высота.

2.

$$(x-1)f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x-1}$$

$$\left(\frac{1}{x}-1\right)f\left(\frac{1}{x}\right)+f(x)=\frac{1}{\frac{1}{x}-1}$$

$$\left(\frac{1-x}{x}\right)\left(\frac{1}{x-1}-(x-1)f(x)\right)+f(x)=\frac{x}{1-x}$$

$$-\frac{1}{x}+\frac{(x-1)^2}{x}f(x)+f(x)=\frac{x}{1-x}$$

$$f(x)\frac{(x-1)^2+x}{x}=\frac{1}{x}-\frac{x}{x-1}=\frac{x-1-x^2}{x\cdot(x-1)}=-\frac{(x^2-x+1)}{x\cdot(x-1)}$$

$$f(x)\cancel{\frac{x^2-x+1}{x}}=-\frac{\cancel{x^2-x+1}}{x\cdot(x-1)}$$

$$f(x)=\frac{1}{1-x}$$

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

3.

$\log_3(x-y+3z-1)+\log_3(2x+2y-2z-3)+\log_3(7-3x-y-z)>x^2+x-6.$

$a=x-y+3z-1$

$b=2x+2y-2z-3$

$c=7-3x-y-z$

$a>0 \Rightarrow a\geq 1$ т.к. по условию a, b, c - целые, то

$b>0 \Rightarrow b\geq 1$

$c>0 \Rightarrow c\geq 1$

$a+b+c\geq 3$

$a+b+c=0x+0y+0z+3$

$a+b+c=3$

$\Rightarrow$

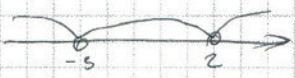
$a=1;\ b=1;\ c=1$ $\log_3 a=0;\ \log_3 b=0;\ \log_3 c=0$

Нерав. приним. вид $0>x^2+x-6$

$x^2+x-6<0$

Виет.

$\boxed{x_1=-3;\ x_2=2}$



$x=-2;\ -1;\ 0;\ 1$

$$\boxed{\begin{cases} x-y+3z-1=1 \\ 2x+2y-2z-3=1 \\ 7-3x-y-z=1 \end{cases}}$$

Если $x=-2$ то

$\begin{cases} -2-y+3z-1=1 \\ -4+2y-2z-3=1 \end{cases}$ $\begin{cases} -y+3z=4 \\ 2y-2z=8 \end{cases} \Rightarrow 4z=16$

$z=4$

$2y-8=8$

$(-2;8;4) \Leftarrow 2y=16 \Rightarrow y=8$

Если $x=-1$, то

$\begin{cases} -1-y+3z-1=1 \\ -2+2y-2z-3=1 \end{cases}$ $\begin{cases} 3z-y=3 \quad (\cdot 2) \\ 2y-2z=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2y+6z=+6 \\ 2y-2y=6 \end{cases} \Rightarrow 4z=12$

$z=3$

$(-1;6;3) \Leftarrow 9-y=3$

$y=6$

Смотрить другой лист

2

Место для скрепки

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2018

03 марта 2018г. (очный тур)

Место проведения МБУ ДО г.Сочи ЦТРиГО - г.Сочи

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

Если $x = 0$, то

$$\begin{cases} -y+3z-1=1 \quad |\cdot 2 \\ 2y-2z-3=1 \end{cases} \quad \begin{cases} 3z-2y=4 \\ 2y-2z=4 \end{cases} \overset{+}{\Rightarrow} z=8$$

$2y-16-3=1$

$2y=20$

$y=10$

$\cancel{2y-y-1=1}$

$\cancel{y=22}$

$(0;10;8)$

Если $x=+1$, то

$$\begin{cases} 1\cancel{x}-y+3z-1=1 \\ 2\cancel{x}+2y-2z-3=1 \end{cases} \quad \begin{cases} 3z-y=3 \quad |\cdot 2 \\ 2y-2z=2 \end{cases} \overset{+}{\Rightarrow} 4z=8$$

$z=2$

$2y-4=2$

$2y=6 \quad y=3$

$(1;3;2)$

Ответ: $(-2;8;4)$; $(-1;6;3)$; $(0;10;8)$; $(1;3;2)$

\+ \+ – ✓ – ✓

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

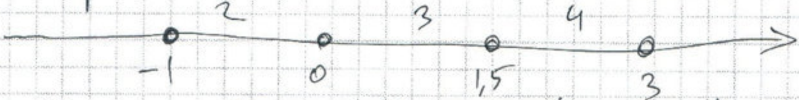
4.

$$\frac{(4^x-16)\cdot(|x^2-3x|-2)}{|2x-3|-|x+1|}\geq 0$$

1) $2x-3=0$ $x+1=0$ $x^2-3x=0$

$x=1,5$ $x=-1$ $x\cdot(x-3)=0$

$x_1=0;\ x_2=3$



2 $2x-3$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
3 $x+1$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
1 x^2-3x	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$

Решим для каждого случая: (1)

$$\frac{(4^x-16)\cdot(+x^2-3x-2)}{-2x+3+x+1}\geq 0 \qquad \frac{(4^x-16)\cdot(x^2-3x-2)}{4-x}\geq 0$$

$(4^x-16)\cdot(x^2-3x-2)\cdot(\cancel{4-x})\geq 0$ $4-x>0$

$x<4$

$4^x-16\geq 0$

$-x^2+3x-2\geq 0$

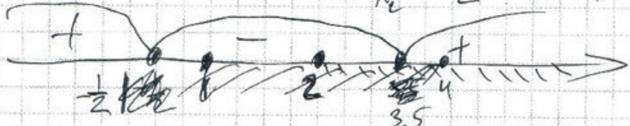
$4^x\geq 4^2$

~~$D=17$ $x_1=\frac{3-\sqrt{17}}{2}\approx-\frac{1}{2}$~~ ~~$D=9-8=1$~~

$x\geq 2$

~~$x_2=\frac{3+\sqrt{17}}{2}\approx 3,5$~~ ~~$x_1=\frac{3-1}{2}=1$~~

~~$x_2=\frac{3+1}{2}=2$~~



$D=17$ $x_1=\frac{3-\sqrt{17}}{2}\approx-\frac{1}{2}$

$x_2=\frac{3+\sqrt{17}}{2}\approx 3,5$

$x\in[2;4]$

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

2

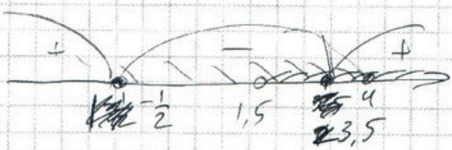
$$\frac{(4^x-16)\cdot(\cancel{+}x^2 \cancel{-} 3x-2)}{-2x+3-x-1} \geq 0$$

$-3x+2 \cancel{\geq} 0$

$-3x > -2$

$x > 1{,}5 \qquad x < 4$

$x \in (1{,}5;4]$



3 $$\frac{(4^x-16)\cdot(-x^2+3x-2)}{-2x+3-x-1} \geq 0$$

$-x^2+3x-2=0$

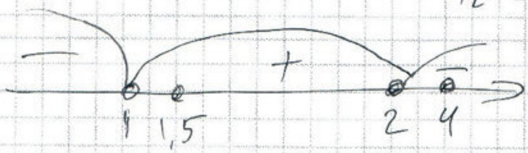
$D=1 \quad x_1=1$

$x_2=2$

$\cancel{x>}\ x<4$

$-3x \cancel{\geq} -2$

$x>1{,}5$



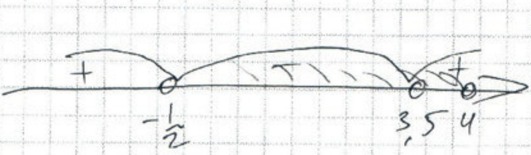
$x \in (1{,}5;2)$

4 $$\frac{(4^x-16)\cdot(x^2-3x-2)}{2x-3-x-1} \geq 0$$

$x<4$

$\cancel{D}\ x_1=-\frac{1}{2}$

$x_2=3{,}5$



$\cancel{2}\ x>4$ Не подходит.

Ответ: $x \in [\cancel{1}1{,}5;2]$

7

$x^2+x=11111111112222222222$

$D=b^2-4ac$

$D=1+44444444448888888888=(66666667)^2$

$x_1=\frac{66666667-1}{2}=33333333$

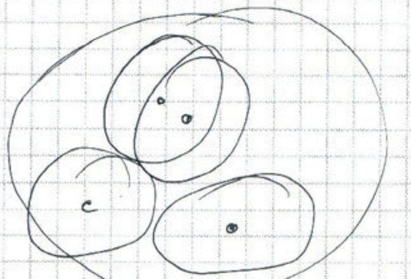
$x_2=-33333334$

6.

Дано: S_0 – сфера

S_{1234} – сферы внутри S_0

$r_{1234}=1$ – радиус сфер.



$LM=2$ т.к $r_{1234}=1$.

$O_2M=\sqrt{5}$

$LO_3=\sqrt{5}$

$O_1\,O_2\,O_3\,O_4$ – центры сфер

XY – медиана $\triangle LXM$

$(XY)^2=\cancel{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}+1+\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 \quad 1=LY$

$(XY)^2=\frac{9}{4}$

$XY=\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2} \quad XY=\frac{3}{2}$

$LM\perp O_2O_1 \quad LM\perp O_3O_4$

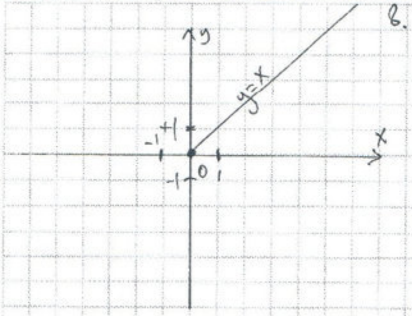
$\frac{3}{2}\cdot 2=3$ – R сферы O

Место для скрепки

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2018 03 марта 2018г. (очный тур)

Место проведения МБУ ДО г.Сочи ЦТРиГО - г.Сочи

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.



8.

$a>1$

$$\begin{cases} y=x \\ y=a^x \end{cases}$$

$\Downarrow$

$x=a^x$

$x=a^x$ при ~~$a=1$ и $x=1$~~

$a=\sqrt[3]{3}$ $x=3$

$a=\sqrt{2}$ $x=2$ и т.д.

При $a\in$ ~~$(1;2)$~~ $x=a^x$ ~~выполн.~~

$a\in(1;\sqrt[n]{n})$ $x=a^x$ выполн.

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

Имеем $f'y = 3y^2 - 4y^3$

Тогда критическая точка $y = \frac{3}{4}$.

В этой точке $f(y)$ имеет максимум. $f max = \left(\frac{3}{4}\right)^3 - \left(\frac{3}{4}\right)^4 =$

$= \left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{27}{256}$.

Так как $\max f(y) = \frac{27}{256}$, то для любой другой точки $f(y) < \frac{27}{256}$, что и требовалось доказать.

Задача 7.

Преобразуем первую часть равенства.

$$11111111\,22222222 = \frac{10^{16}-1}{9} + \frac{10^8-1}{9} = \frac{(10^8-1)(10^8+1)}{9} + \frac{10^8-1}{9} =$$

$$= \frac{10^8-1}{9} \cdot (10^8+2) = \frac{10^8-1}{3} \cdot \frac{10^8+2}{3}.$$

Покажем, что число $\frac{10^8-1}{3}$ есть корень данного уравнения.

Действительно, подставляя $x = \frac{10^8-1}{3}$ в уравнение, получим: $\left(\frac{10^8-1}{3}\right)^2 + \frac{10^8-1}{3} = \frac{10^8-1}{3} \cdot \left(\frac{10^8-1}{3} + 1\right) =$

$= \frac{10^8-1}{3} \cdot \frac{10^8+2}{3}$, т. е. равно правой части

Место для скрепки

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2018

03 марта 2018г. (очный тур)

Место проведения Лицей-интернат №6 ОАО "РЖД" - г.Саратов

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

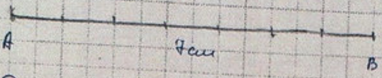
Вариант 1.

3 балла

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
+	−	0	+	0	+	−	0	3

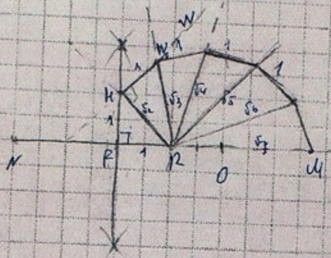
б1.

Дано:



Построить:

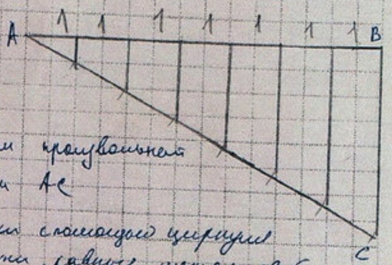
отрезок $\sqrt{7}$ (RM)



Построение

1) По теореме Фалеса

Отложим отрезки равные между собой



2) Построим произвольный отрезок AC

3) Отложим с помощью циркуля отрезки, равные между собой

4) Проведем параллельные отрезки. Получаем: Семь отрезков равны 1см.

5) Возьмем произвольный отрезок ND

6) С помощью циркуля отложим ⊥

7) Отложим отрезок $FH=1$ на перпендикуляр и $FR=1$ на ⊥-ре. По т. Пиф.: $HR=\sqrt{2}$

8) Продлим HR с помощью циркуля построим ⊥р HW

9) Отложим $HW_1 = 1$ см по т. Пиф.: $W_1R = \sqrt{3}$

10) Аналогично делаем дальше и получаем (по т. Пиф) $RM = \sqrt{7}$.

2

Ответ: $\sqrt{7}$.

№2.

$$f(x)+x\,f\left(\frac{x}{2x-1}\right)=2$$

Замена $f(x)=x$. ??

$$x+x\cdot\frac{x}{(2x-1)}=2$$

$$\frac{2x^2-x+x^2-4x+2}{2x-1}=0$$

$$\frac{3x^2-5x+2}{2x-1}=0$$

$x_1=1$

$x_2=\frac{2}{3}$

Проверка:

1) $1+\frac{1}{2-1}=2$ $x=1$

2) $x=\frac{2}{3}$ $\frac{2}{3}+\frac{\frac{4}{9}}{2\cdot\frac{2}{3}-1}=2$

—

Ответ: $1;\ \frac{2}{3}$.

№4.

$$\frac{|x-1|-1}{(1-x^2)(3^x-27)}\geqslant 0$$

Рассмотрим: $f(x)=\frac{|x-1|-1}{(1-x^2)(3^x-27)}$

Нули функции: $\begin{cases}|x-1|-1=0\\(1-x^2)(3^x-27)\neq 0\end{cases}$ $\begin{cases}x=0\\x=2\\x\neq\pm1\\x\neq 3\end{cases}$

+ − + − + −

-1 0 1 2 3

$f(x)\geqslant 0$ $f(2{,}5)>0$ $f(0{,}5)>0$

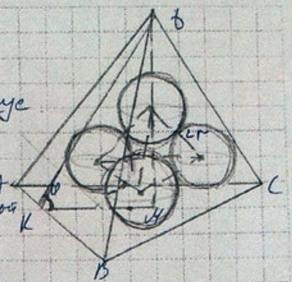
Ответ: $x\in(-\infty;-1)\cup[0;1)\cup[2;3)$.

+

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№6.

Решение



Дано: $a = \frac{10}{\sqrt{6}-1}$

Найти: r

1) Пусть r – искомый радиус

2) Соединим попарно центры шаров и получим правильный тетраэдр.

3) Сторона тетр. (a) $a_1 = 2r$. Центры лежат в вершинах тетраэдра.

4) Центр правильного тэтраэдра совпадает с центром O.

5) Пусть шар (O_1, r) вписанный в угол с вершиной b касается ABb в т.ч. P

6) Тогда $O_1P = r$, $Ob = \frac{3}{12} a\sqrt{6} = \frac{a\sqrt{6}}{4}$; $OO_1 = \frac{3}{12} 2r\sqrt{6} = \frac{r\sqrt{6}}{2}$

$$O_1b = Ob - OO_1 = \frac{a\sqrt{6}}{4} - \frac{r\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{6}(a-2r)}{4}$$

7) Пусть M – центр основ. ABC, K – середина AB, угол между высотой тетраэдра и плоскостью грани — φ.

8) $\triangle bMK$ – прям. $\sin\varphi = \frac{MK}{bK} = \frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{2}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{3}$

Значит, $O_1b = \frac{O_1P}{\sin\varphi}$; $\frac{\sqrt{6}(a-2r)}{4} = 3r \Rightarrow r = \frac{a(\sqrt{6}-1)}{10}$

Ответ: $r = \frac{a(\sqrt{6}-1)}{10}$ = ?

№7. $x^2 + x = 1111111122222222$; $x^2 + x - 1111111122222222 = 0$

$D = 1 + 4 \cdot 1111111122222222 = 4444444488888889$ $\sqrt{D} = 66666667$

$x_1 = \frac{66666666}{2} = 33333333$

$x_2 = \frac{-66666668}{2} = -33333334$

где вычисления?

Ответ: $x_1 = 33333333$, $x_2 = -33333334$

Регистрация №61908

Место для скрепки

ПАРУСА НАДЕЖДЫ - 2018

03 марта 2018г. (очный тур)

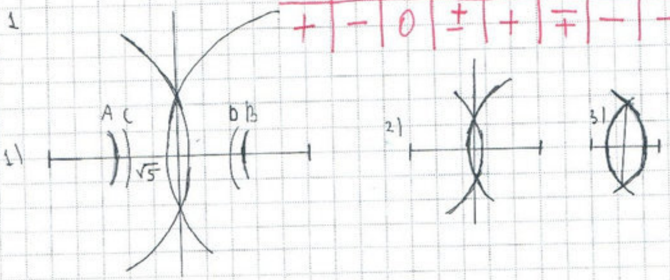
Место проведения МАДИ - г. Москва

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

Вариант № 2

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
+	−	0	±	+	∓	−	−	3

№ 1



Изначально у нас есть отрезок $\sqrt{5}$ (1), ставим ножку циркуля в один из концов отрезка и проводим дугу, радиусом больше середины отрезка, ~~тоже~~ но меньше длины самого отрезка, далее чертим вторую дугу такого же радиуса из другого конца отрезка, соединяем точки пересечения дуг. Отмеряем циркулем новый отрезок (2) и так же проводим дуги радиусами больше середины, затем проделываем с ним такую же операцию. С отрезком (3) поступаем так же, т.е делим его циркулем. Возвращаемся к (1) ставим на нем отметки A и B с разных концов на растоянии, равном середине (2). Из этих отметок аналогично ставим C и D опираясь на (3). => Мы получили отрезок CD = 2 с помощью циркуля и линейки без делений.

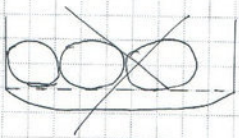
№7 $x^2 - x = 1111122222$

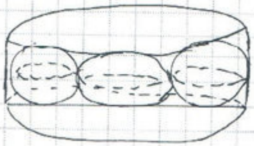
$x(x-1) = 1111122222$

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№6 Дано: цилиндр
3 вписанные сферы
r сф = 1
Найти: Vц – ?

условие касания – – ровно 1 общая точка.





Если сферы вписаны и каждая касается оснований цилиндра, то
hц = d сф => h = r сф · 2 = 2

+

dц = 3 d сф = 3 · 2 · r = 6 => rц = 3

$V_ц = \pi R^2 \cdot h = \pi \cdot 3^2 \cdot 2 = 18\pi$

Ответ: 18π.

№2 f(x) – ? φ(x) – ?

$$\begin{cases} f(2x+2)+2\varphi(4x+7)=x-1 & (1) \\ f(x-1)+\varphi(2x+1)=2x & (2) \end{cases} \Rightarrow (2)-(1)$$

$f(x-1)-f(2x+2)+\varphi(2x+1)-2\varphi(4x+7)=2x-x+1$

$f(x-1)-f(2x+2)+\varphi(2x+1)-\varphi(8x+14)=x+1$

$f(x-1-2x-2)+\varphi(2x+1-8x-14)=x+1$

$f(-x-3)+\varphi(-6x-13)=x+1$

$f(-x-3)+\varphi(-6x-13)=x+1$

–

N 4 $\dfrac{(2^{x^2-2x}-8)(|3+2x|-|x-2|)}{|x^2-1|-3} > 0$

ОДЗ: $|x^2-1|-3 \neq 0$

$\Downarrow$

$x^2 \neq 4$

$x \neq \pm 2$

$(2^{x^2-2x}-8)=0$

$2^{\cancel{x}x^2-2x}=8$

$2^{x^2-2x}=2^3$

$x^2-2x-3=0$

$D=16$

$x_{1,2}=\left[\begin{array}{l}3\\-1\end{array}\right. \Rightarrow (x-3)(x+1)$

$(|3+2x|-|x-2|)=0$

$(2|1,5+x|-|x-2|)=0$

а) $-2 > -1,5 \Rightarrow$ при $x \leq -2$ оба модуля будут раскрыты с "$-$"

$\Rightarrow 2(-1,5-x)-(-x+2)=0$

$-3-2x+x-2=0$

$x+5=0$

б) $2 \geq 1,5 \Rightarrow$ при $x \geq 2$ оба модуля будут раскрыты с "$+$"

$\Rightarrow 2x+3-x-2=0$

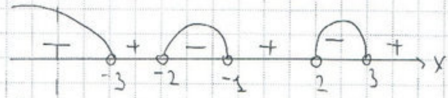
$x+3=0$

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№4 продолжение:

а)

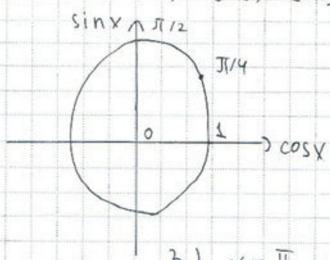
б)



$\Rightarrow x \in (-\infty; -5) \cup (-2; -1) \cup \cup (2; 3)$

Ответ: $x \in (-\infty; -5) \cup (-2; -1) \cup (2; 3)$

№5 Д-ть: $0 < x < \frac{\pi}{4}$ $\quad \frac{\cos x}{(\sin^2 x)(\cos x - \sin x)} > 8$



1) $x = 0^\circ = 0$ рад: $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$
$tg = 0$, $ctg = \varnothing$

2) $x = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$: $\sin = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $tg = 1$, $ctg = 1$

3) $x = \frac{\pi}{6}$: $\sin = \frac{1}{2}$, $\cos = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $tg = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $ctg = \sqrt{3}$

Рассмотрим случай 1) $x = 0$:

$$\frac{\cos 0}{\sin 0 \cdot \sin 0 (\cos 0 - \sin 0)} > 8$$

$$\frac{1}{0 \cdot (1 - 0)} = \varnothing, \checkmark \text{ т.к. } 0 < x$$

2) $x = \frac{\pi}{6}$, $0 < \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{4} \Rightarrow$ данное удовлетв. неравенству

$$\frac{\cos\frac{\pi}{6}}{(\sin\frac{\pi}{6} \cdot \sin\frac{\pi}{6})(\cos\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{6})} > 8$$

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

Продолжение N 5

$$\frac{\cos\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}\cdot\sin\frac{\pi}{6}\left(\cos\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{6}\right)}>8$$

$$\frac{\sqrt{3}/2}{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)}>8 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}/2}{\frac{(\sqrt{3}-1)}{8}}>8$$

$\sqrt{1}<\sqrt{3}<\sqrt{4} \Rightarrow \sqrt{3}-1>0$

$1<\sqrt{3}<2$

$4\sqrt{1}<4\sqrt{3}<4\sqrt{4} \Rightarrow 4<4\sqrt{3}<4\sqrt{4}$

$\Rightarrow \frac{\pi}{6}$ - подходит ✓

3) $x=\frac{\pi}{4}$:

$$\frac{\cos\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4}\cdot\sin\frac{\pi}{4}\left(\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}\right)}>8$$

$$\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}=\varnothing \Rightarrow x=\frac{\pi}{4} \text{ - не подх}$$

$\Rightarrow$ нер. выполняется при $x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№8

при каких a, $S = x_1^2 + x_2^2$ — наибольшая, S - ?

$x^2 + 2ax + 2a^2 + 4a + 3 = 0$

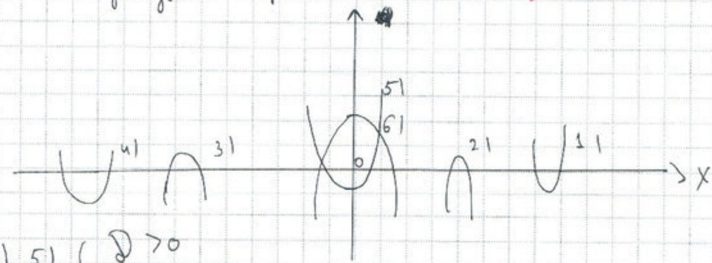
Введем $f(x) = x^2 + 2ax + 2a^2$

Метод плавающей параболы: $x_в = \frac{-b}{2a} = \frac{-2a}{a} = -a$

$D = b^2 + 4ac = 4a^2 + 4(2a^2 + 4a + 3) = 4a^2 + 8a^2 + 16a + 12 =$

$= 12a^2 + 16a + 12$

Нам подходят параболы:



1), 5) $\begin{cases} D > 0 \\ x_в \geq 0 \\ x_1 > 0 \\ x_2 > 0 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_в < 0 \\ x_1 < 0 \\ x_2 < 0 \end{cases}$

2), 6) $\begin{cases} x_в \geq 0 \\ x_1 > 0 \\ x_2 > 0 \end{cases}$

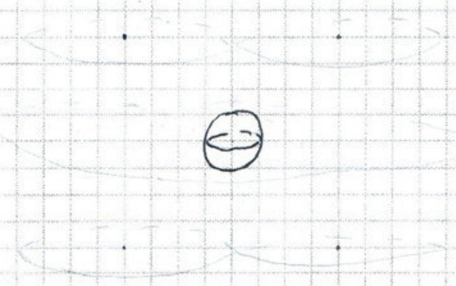
4) $\begin{cases} x_в < 0 \\ x_1 < 0 \\ x_2 < 0 \end{cases}$

3В

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№ 6.

1) Начертим ~~окр~~ сф 4 маленькие сферы радиусом 1 см, но здесь для удобства возьмём $R = 2$ см.



Мы можем видеть, что между 4-мя сферами можно вложить ещё одну сферу с примерным $R = \frac{1}{2}$ => можно

=> если вернуть сфер обратно к условиям задачи, то мы получим, что d сферы 5 => $d =$ ~~2+2+0,5+~~ $1+1+0,5 = 2,5$, но нам необходим R => $R = \frac{2,5}{2} = 1,25$ Ответ: 1,25.

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
−	+	−	+	−	−	+	0	2

№1

части уравнения. А тогда второй корень будет равен: $-\frac{10^8+2}{3}$.

Ответ: $\left\{\frac{10^8-1}{3}; -\frac{(10^8+2)}{3}\right\}$.